

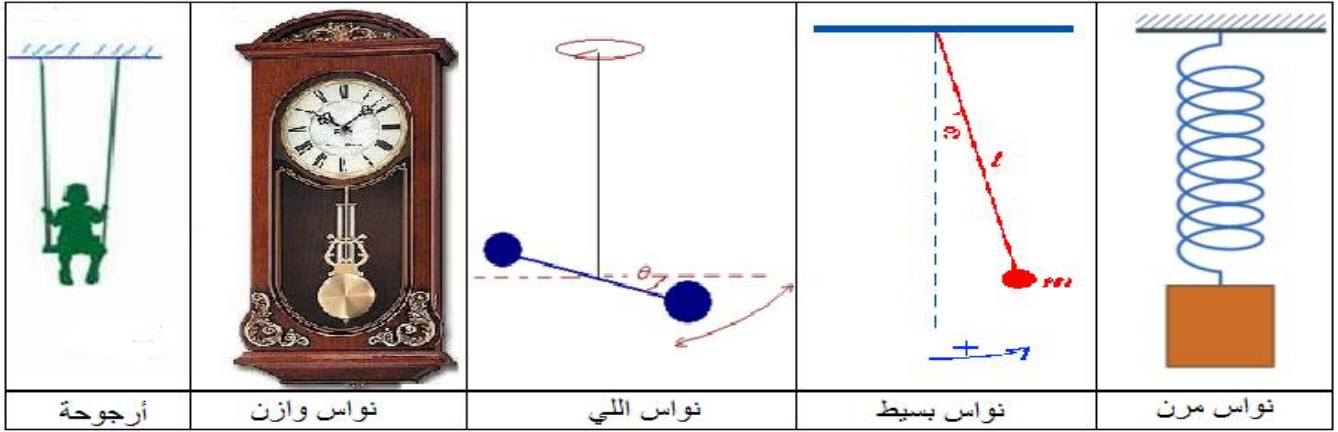
لمجموعات الميكانيكية المتذبذبة systèmes mécaniques oscillants

I - تقديم مجموعات ميكانيكية متذبذبة.

1 - تعريف:

يمكن لبعض الأجسام أن تنجز حركة ذهاب وإياب عندما نزيحها أو نديرها عن موضع توازنها المستقر ثم نحررها. نقول إن هذه الأجسام تكون متذبذبات ميكانيكية.

2 - أمثلة لبعض المتذبذبات الميكانيكية.



* النواس المرن: يتكون من جسم صلب كتلته m ، مرتبط بأحد طرفي نابض ذي لفات غير متصلة، صلابته K ، وكتلته مهملة.

* النواس البسيط: يتكون من جسم صلب ذو أبعاد صغيرة، كتلته m ، يتأرجح على مسافة ثابتة من محور أفقي ثابت.

* نواس اللي: يتكون من سلك فلزي رأسي، أحد طرفيه مثبت، ومحوره (Δ) يمر من مركز قصور القضيب المعلق في الطرف الآخر.

* النواس الوازن: هو جسم صلب يمكنه أن يتذبذب حول محور (Δ) أفقي ثابت، ولا يمر بمركز قصوره.

II - الحركة التذبذبية ومميزاتها.

1 - تعريف:

الحركة التذبذبية هي حركة ذهاب وإياب حول موضع معين، وهي حركة تميز المتذبذبات الميكانيكية. والحركة التذبذبية **الحرّة** هي الحركة التذبذبية التي ينجزها متذبذب ميكانيكي دون أن يكتسب طاقة ما من أي مجموعة خارجية بعد إحداث حركته.

2 - مميزات الحركة التذبذبية.

تتميز الحركة التذبذبية بما يلي:

- **موضع التوازن المستقر**: وهو الموضع الذي إذا زحزح عنه المتذبذب يعود إليه ليستقر فيه.

- **وسع الحركة**: هو نصف المسافة أو الزاوية القصوى، التي يقطعها مركز قصور الجسم المتذبذب، حول موضع توازنه، خلال ذبذبة واحدة.

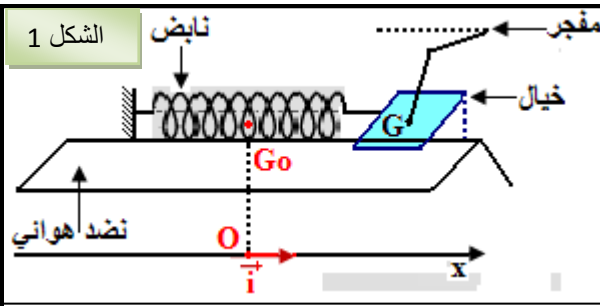
- **دور الحركة (الدور الخاص)**: هو المدة الزمنية اللازمة لإنجاز ذبذبة واحدة. نرسم له ب T_0 ونعبر عنه بالثانية s .

أ - نشاط تجريبي 1

* الهدف: - تعيين الوسع والدور الخاص للنواس المرن.

- التوصل إلى المعادلة التفاضلية وحلها

* العدة التجريبية: نضد هوائي ولوازمه - نابض لفاته غير متصلة، وكتلته مهملة، وصابته K معروفة.

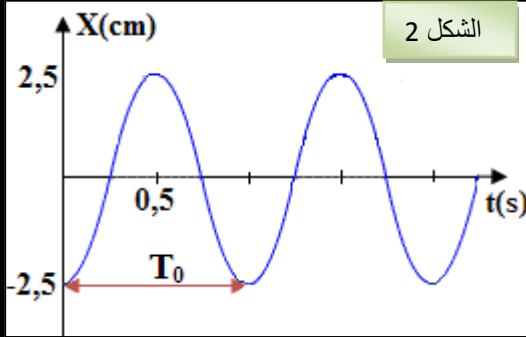


* المناولة :
نضبط أفقية النضد الهوائي، ونربط الخيال بالطرف الحر للنابض، ونثبت طرفه الحر لهذا الأخير بحامل (أنظر الشكل جانبه).
نزيع الخيال عن موضع توازنه بمسافة $X_m = 2,5\text{cm}$ ، ونحرره بدون سرعة بدئية.

نثبت ورق التسجيل على أسطوانة موازية لمحور النضد، يمكنها الدوران بسرعة ثابتة حول محورها، ونسجل النقط المختلفة من طرف مفجر الخيال خلال مدد زمنية متتالية، ومتساوية قيمتها $\tau = 60\text{ms}$. فنحصل على التسجيل جانبه.

ب - استثمار:

1 - حدد طبيعة حركة مركز قصور الخيال.



2 - أ - مثل المستقيمين Δ_1 و Δ_2 ، اللذين يحددان مجال حركة مركز قصور الخيال حول موضع توازنه.

ب - قس المسافة d بين المستقيمين Δ_1 و Δ_2 ، وقارنها مع المسافة X_m .

3 - تمثل X_m وسع الحركة، حدد قيمته.

4 - يمثل الدور الخاص للمتنذب المدة الزمنية لذنبه واحدة. عين الدور الخاص T_0 لحركة المجموعة (جسم صلب - نابض).

III - خمود التذبذبات

تحدث ظاهرة الخمود بسبب الاحتكاكات التي يمكن تصنيفها إلى:

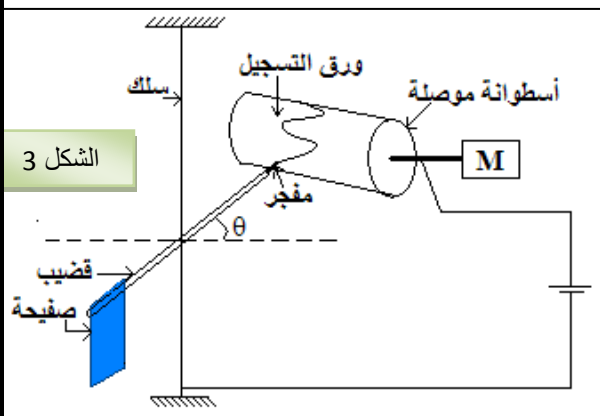
- احتكاكات مائعة: تحدث عند تماس المتنذب مع جسم مائع كالهواء والماء؛
- احتكاكات صلبة: تحدث عند تماس المتنذب مع جسم صلب.

1 - الخمود بالاحتكاكات المائعة:

أ - تحديد أنظمة الخمود وأصنافه

نشاط تجريبي 2:

* العدة: نواس لي متكون من سلك ثابتة ليه $C = 0,16\text{N.m.rad}^{-1}$ وقضيب عزم قصوره $J_\Delta = 10^{-3}\text{Kg.m}^2$ - محرك ورق التسجيل - صفيحة كتلتها مهملة، ومساحتها $S = 7 \times 4\text{cm}^2$ - حوض به ماء.



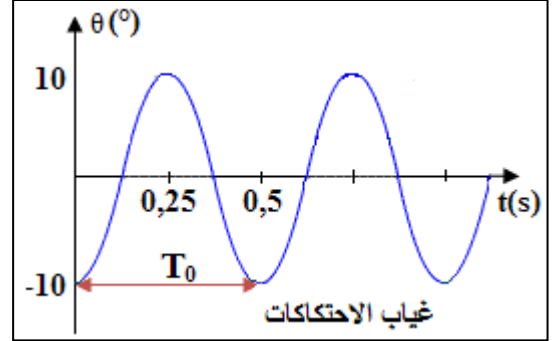
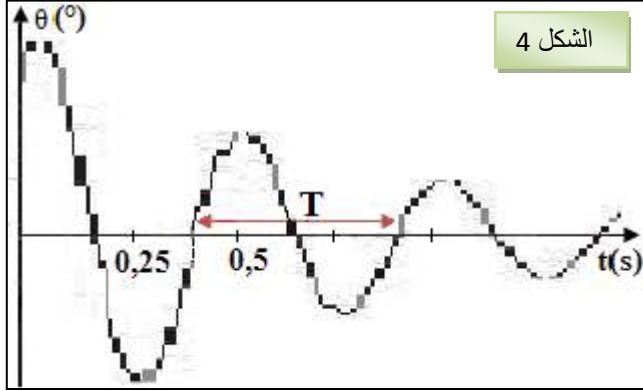
* المناولة (1): **خمود ضعيف**
نزيع القضيب عن موضع توازنه بزواوية صغيرة $\theta = 10^\circ$. ونحرره بدون سرعة بدئية عند اللحظة $t = 0$. نسجل حركة المتنذب باستعمال ورق التسجيل المثبت على أسطوانة التي يمكنها الدوران بسرعة ثابتة بواسطة محرك (M) (الشكل 3). فنحصل على الشكل 4.

استثمار:

1 - هل يتغير وسع الحركة بدلالة الزمن عند وجود الاحتكاك؟

2 - تتميز التذبذبات في هذه الحالة بشبه الدور T . اقترح تعريفا لشبه الدور.

3 - حدد مبيانيا شبه الدور T ، ثم قارنه بالدور الخاص T_0 . ماذا تستنتج؟

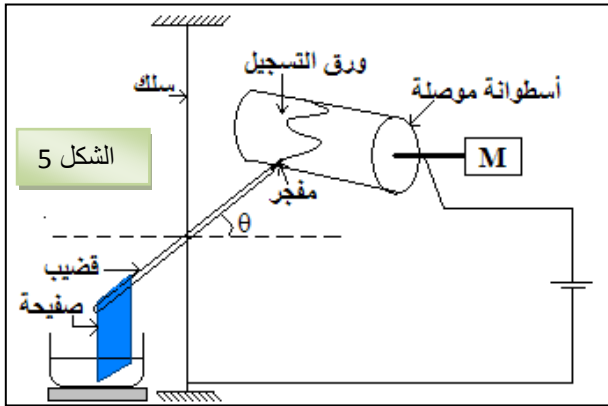


خلاصة:

في حالة تذبذبات باحتكاكات مائعة، يكون شبه الدور T أكبر بقليل من الدور الخاص T_0 .

* **المناقشة 2 : الخمود الحاد**

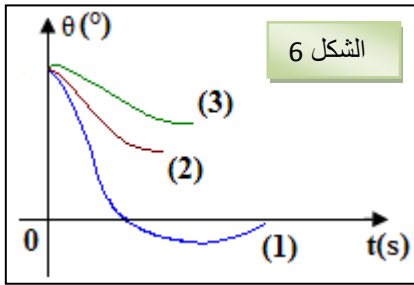
نحتفظ بنفس التركيب السابق مع غمر جزء من الصفيحة في الماء (الشكل 5). نغير مساحة الجزء المغمور من الصفيحة، ونسجل في كل مرة حركة المتذبذب فنحصل على المنحنيات الممثلة في الشكل 6.



استثمار:

1 - هل يمكن التكلم عن شبه الدور، بالنسبة للحركات الملاحظة؟

2 - كلما كان خمود بعض المتذبذبات كبيرا، كلما كان عدد التذبذبات اللازمة لكي يعود المتذبذب لموضع توازنه صغيرا. تردد أهمية الخمود بزيادة الاحتكاكات، ويمكن أن نميز بين ثلاث أنظمة للخمود:
- النظام تحت الحرج: ينجز المتذبذب ذبذبة واحدة قبل توقفه؛
- النظام الحرج: يرجع المتذبذب إلى موضع توازنه بعد إزاحته وبدون تدبب؛
- النظام فوق الحرج: يستغرق المتذبذب وقتا طويلا للوصول إلى موضع توازنه وبدون تدبب. حدد من خلال الشكل 6، المنحنى الممثل لكل نظام.



خلاصة:

في حالة خمود حاد، لا يمكن لمجموعة أن تتذبذب، بحيث عند إزاحتها عن موضع توازنها تعود إليه. نقول إن الحركة

لا دورية.

* **المناقشة 3 : الخمود بالاحتكاكات الصلبة**

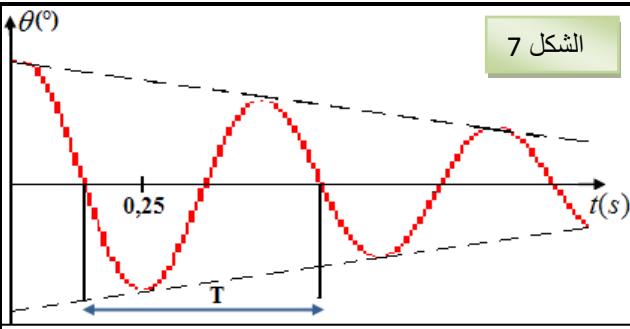
نحتفظ بنفس التركيب السابق، ونغير في هذه المرة نوع الاحتكاكات، بحيث يكون الطرف الأسفل للصفيحة في تماس مع السطح الأفقي. نسجل حركة المتذبذب، فنحصل على التسجيل الممثل في الشكل 7.

استثمار:

1 - حدد كيف يتغير وسع الحركة مع الزمن.

2 - احسب شبه الدور T ، وقارنه بالدور T₀ .

الشكل 7



خلاصة:

في حالة تذبذبات مخمدة باحتكاكات صلبة، يكون شبه الدور T مساويا للدور الخاص T₀.

IV - المجموعة المتذبذبة (جسم صلب - نابض)

1 - قوة الارتداد المطبقة من طرف النابض.

نعتبر نواسا مرنا في وضع أفقي. عندما يكون النابض حرا تحتل نقطة تماسه مع الجسم الموضع A₀ ، وعندما يكون مضغوطا أو مطالا تحتل هذه النقطة الموضع A. في هذه الحالة، يطبق النابض على الجسم قوة ارتداد \vec{F} تسعى إلى إرجاع الطرف الحر للنابض إلى وضعه البدئي.

يعبر عن قوة الارتداد \vec{F} ب:

$$\vec{F} = -Kx\vec{i} \quad \text{أي} \quad \vec{F} = -KA_0A\vec{i}$$

حيث K صلابة النابض.

$$AA_0 = \ell - \ell_0 = x$$

2 - المعادلة التفاضلية لحركة الجسم الصلب في حالة احتكاكات مهملة

* المجموعة المدروسة: {الجسم S}

* جرد القوى:

- \vec{P} : وزن الجسم S ؛

- \vec{R} : تأثير السطح الأفقي؛

- \vec{F} : قوة الارتداد.

نعتبر عن القانون الثاني لنيوتن بالعلاقة:

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}_G \quad \text{أي}$$

لدينا: $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$ لغياب الحركة على المحور (O, j) وبالتالي: $\vec{F} = m\vec{a}_G$

بإسقاط العلاقة على المحور (O, i) نحصل على: $-Kx\vec{i} = m\ddot{x}\vec{i}$

أي: $-Kx = m\ddot{x}$ نكتب: $m\ddot{x} + Kx = 0$

نتوصل إذن إلى: $\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$ وهي المعادلة التفاضلية.

في غياب الاحتكاك، يحقق أفصول مركز القصور G للجسم الصلب المكون لنواس مرن المعادلة التفاضلية: $\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$ حيث m كتلة الجسم و K صلابة النابض.

ملحوظة:

نفس المعادلة التفاضلية تتوصل إليها بالنسبة لنواس مرن رأسي وحر.

3 - المعادلة الزمنية لحركة الجسم (S): $X = f(t)$.

حل المعادلة التفاضلية السابقة يكتب على الشكل التالي: حيث:

$$x(t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

x_m : وسع الحركة (m) ؛

$\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi$: طور الحركة التذبذبية (rad) ؛

T_0 : الدور الخاص (s) ؛

φ : طور الحركة عند $t = 0$ (rad).

طبيعة حركة مركز القصور G للجسم مستقيمة جيبيية.

3-1 - تحديد x_m و φ

لدينا عند اللحظة $t = 0$ $x = x_m = 2,5\text{cm}$ و $V = 0$ (الجسم انطلق بدون سرعة بدئية).

$$\text{إذن } v = \frac{dx}{dt} = 0 \text{ يعني: } -x_m \frac{2\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) = 0$$

$$t = 0 \text{ يعني } -x_m \frac{2\pi}{T_0} \sin \varphi = 0 \text{ ومنه } \sin \varphi = 0 \text{ إذن: } \varphi = 0 \text{ أو } \varphi = \pi$$

وبما أن $x_m \cos \varphi > 0$ فإن: $\varphi = 0$

وبالتالي فإن:

$$x(t) = 2,5 \cdot 10^{-2} \cos \frac{2\pi}{T_0} t$$

3-2 - تعبير الدور الخاص T_0 للمجموعة {جسم صلب - نابض}

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

سؤال: بالاعتماد على المعادلة التفاضلية وحلها بين أن تعبير الدور الخاص هو:

حيث: T_0 هو الدور الخاص (s) ؛

m هي كتلة الجسم الصلب (Kg) ؛

K هي صلابة النابض (N.m^{-1}).

ملحوظة:

نعبر عن التردد الخاص للتذبذبات بالعلاقة: $f_0 = \frac{1}{T_0}$ أي: $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}$

أ - تأثير الكتلة m على الدور الخاص T_0 .

مبيانيا المنحنى الممثل للدالة $T_0^2 = f(m)$ عبارة عن مستقيم يمر من أصل

المعلم معادلته: $T_0^2 = \alpha \cdot m$ (الشكل 9)

α : المعامل الموجه للمستقيم تعبيره: $\alpha = 4\pi^2 \frac{1}{K}$

$$T_0^2 = 4\pi^2 \frac{m}{K}$$

وبالتالي تصير معادلة المستقيم:

ب - تأثير صلابة النابض على الدور الخاص.

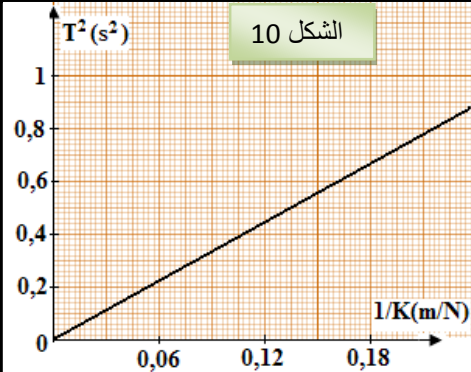
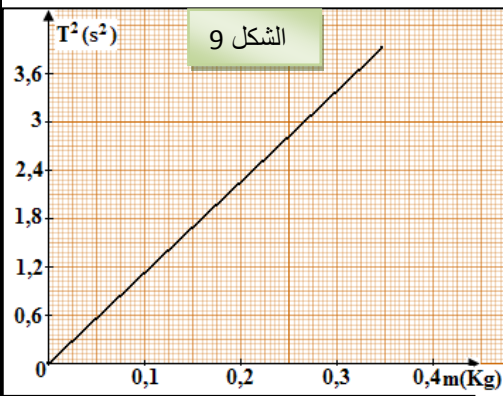
مبيانيا المنحنى الممثل للدالة $T_0^2 = f\left(\frac{1}{K}\right)$ عبارة عن مستقيم يمر من أصل

المعلم معادلته: $T_0^2 = \alpha \frac{1}{K}$ (الشكل 10)

α : المعامل الموجه للمستقيم تعبيره: $\alpha = 4\pi^2 m$

$$T_0^2 = 4\pi^2 \frac{m}{K}$$

وبالتالي تصير معادلة المستقيم:



V - نواس اللي : Pendule de torsion

1 - مزدوجة الارتداد

عندما ندير القضيب بزاوية θ_m حول المحور (Δ) بالنسبة لموضع التوازن ، ثم نحرره بدون سرعة بدئية فإنه يسعى إلى أن يعود إلى موضع توازنه تحت تأثير قوى يطبقها السلك لها خاصيات مزدوجة وتسمى مزدوجة اللي يتناسب عزمها مع زاوية الدوران ونعبر عنه بالعلاقة :

$$\mathcal{M} = - C \times \theta$$

ملحوظة:

تسمى مزدوجة اللي مزدوجة ارتداد لأنها ترد القضيب إلى موضع توازنه. (وجود الإشارة " - ")

2 - المعادلة التفاضلية لحركة نواس اللي في حالة الاحتكاكات مهملة.

نشاط تجريبي 3

ندير القضيب بزاوية θ_m بالنسبة لموضع توازنه ثم نحرره بدون سرعة بدئية نلاحظ أنه ينجز تذبذبات حرة حول موضع التوازن.

في لحظة t نعلم موضع القضيب بالزاوية θ التي يكونها مع موضع التوازن ندرس حركة القضيب في معلم مرتبط بالأرض حيث يخضع :

- لوزنه \vec{P} .

- القوة \vec{R} التي يطبقها السلك

- مزدوجة اللي عزمها: $\mathcal{M}(t) = -C\theta$

نطبق العلاقة الأساسية للديناميك.

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}(t) = J_\Delta \ddot{\theta} \Leftrightarrow \sum \mathcal{M}(\vec{F}) = J_\Delta \ddot{\theta}$$

إذن العلاقة السابقة تكتب كما يلي: $-C\theta = J_\Delta \ddot{\theta}$ - بالتالي المعادلة التفاضلية التي يحققها الأفعال الزاوي لحركة القضيب:

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta} \theta = 0$$

المعادلة الزمنية للحركة هي حل المعادلة التفاضلية وتكتب على الشكل:

$$\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$$

في غياب الاحتكاك حركة القضيب دورانية جيئية دورها الخاص T_0 حيث:

$\theta(t)$: الأفعال الزاوي للقضيب المتذبذب في اللحظة t (rad)

θ_m : الوسع أو الأفعال الزاوي القصوي ب (rad).

$\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$: الطور عند اللحظة t ب (rad)

φ : الطور عند أصل التواريخ ب (rad).

3 - الدور الخاص.

تعبير الدور الخاص لنواس اللي الحر هو: بالتالي:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$$

حدته الثانية (s)

J_Δ : عزم قصور الجسم الصلب (القضيب) بالنسبة للمحور (Δ) (Kg.m^2)

C : ثابتة لي السلك (N.m.rad^{-1}).

التردد الخاص لحركة نواس اللي: $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$ وحدته الهرتز (Hz)

4 - تأثير عزم القصور J_Δ على الدور الخاص لنواس اللي.

نشاط تجريبي 4:

* الهدف: إبراز تأثير عزم قصور القضيب، وثابتة لي السلك، على الدور الخاص لنواس اللي.

* العدة التجريبية: المجموعة (حامل - سلك - قضيب) المكونة لنواس اللي - خلية كهروضوئية - ميقت إلكتروني - سحمتان لهما نفس الكتلة $m = 50g$ - أسلاك معدنية ثابتات ليها مختلفة.

نستعمل الخلية الكهروضوئية والميقت لقياس نصف دور التذبذبات بنفس الطريقة المتبعة في النشاط التجريبي 3.

* المناولة: احتفظ بنفس السلك، وغير عزم قصور المجموعة، بتغيير المسافة d الفاصلة بين مركز قصور كل سحمة ومحور الدوران.

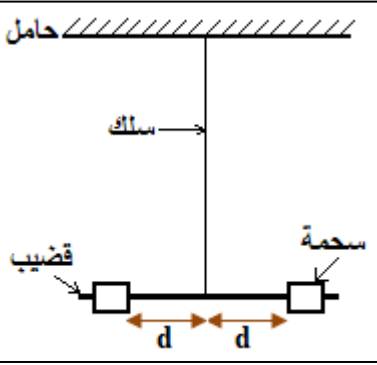
قس في كل مرة نصف الدور $\frac{T_0}{2}$ للمتذبذب.

* استثمار:

1 - اعط تعبير J_Δ عزم قصور المجموعة {قضيب + سحمتان} بدلالة الكتلة m ، وعزم قصور القضيب J_Δ ، والمسافة d .

2 - بين أن الدور الخاص T_0 للمجموعة يكتب كما يلي: $T_0^2 = \frac{4\pi^2 J_\Delta}{C} + \frac{8\pi^2 m}{C} \cdot d^2$

- أتمم الجدول أسفله.



الشكل 12

				d(m)
				T_0 (s)
				$d^2(m^2)$
				T_0^2

3 - مثل المنحنى الممثل للدالة $T_0^2 = f(d^2)$.

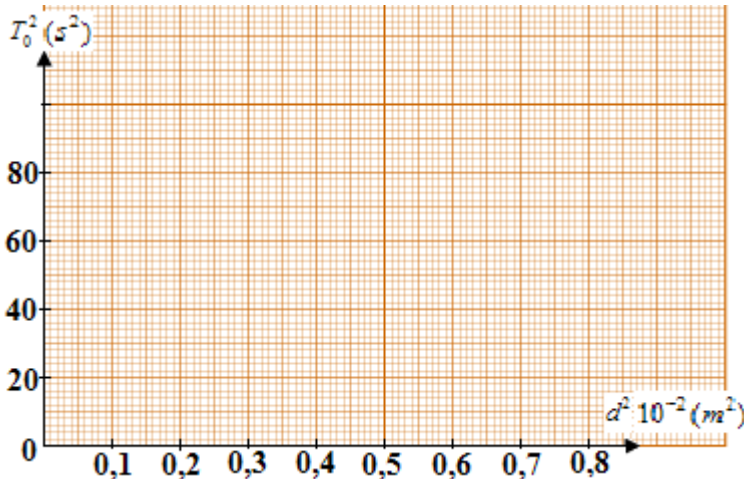
4 - حدد مبيانيا معادلة المستقيم المحصل عليه.

5 - حدد كلا من C ثابتة لي السلك، و J_Δ عزم قصور القضيب.

- 1

- 2

- 3



VI - النواس الوازن.

1 - المعادلة التفاضلية.

نعتبر المجموعة المدروسة (S) صلبة، غير قابلة للتشويه، تتكون من قضيب تثبيت عليه سحمة، كتلتها m وعزم قصورها J_{Δ} بالنسبة لمحور دوران أفقي (Δ). ندرس حركة النواس في معلم مرتبط بمرجع أرضي نعتبره غاليليا. نمعلم في كل لحظة موضع النواس بأفصوله الزاوي θ . تخضع المجموعة خلال حركتها إلى:

- \vec{P} : وزنها؛

- \vec{R} : القوة المطبقة من طرف المحور (Δ).

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على المجموعة في دوران حول محور ثابت (Δ) فنكتب: $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) + \mathcal{M}(\vec{R}) = J_{\Delta} \ddot{\theta}$

$\mathcal{M}(\vec{R}) = 0$ لأن خط تأثير يتقاطع مع المحور، وبالتالي: $\mathcal{M}(\vec{P}) = J_{\Delta} \ddot{\theta}$

نضع $d = OG$ فنكتب: $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) = -mg.d.\sin\theta$ ومنه فإن: $\ddot{\theta} + \frac{mg.d}{J_{\Delta}} \sin\theta = 0$

المعادلة التفاضلية المحصل عليها غير خطية وحلها ليس جيبيًا.

ملحوظة: في حالة تذبذبات ذات وسع صغير ($\theta \leq 15^\circ$) يعني ($\theta \leq 0,26\text{rad}$) تكتب المعادلة التفاضلية كما يلي:

$$\ddot{\theta} + \frac{mg.d}{J_{\Delta}} \theta = 0$$

2 - الدور الخاص للنواس الوازن.

الدور الخاص لحركة المجموعة الصلبة للنواس الوازن ذو وسع صغير هو: $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\Delta}}{mgd}}$

نعرف كذلك التردد الخاص للتذبذبات بالعلاقة: $T_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgd}{J_{\Delta}}}$

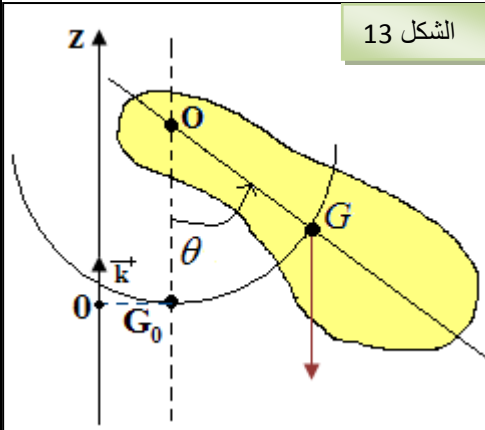
3 - النواس البسيط.

النواس البسيط نموذج مؤتمل للنواس الوازن، حيث $d = \ell$ طول النواس، و $J_{\Delta} = m\ell^2$.

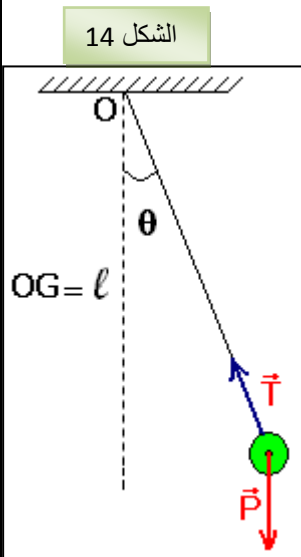
في هذه الحالة تكون المعادلة التفاضلية وبالنسبة لتذبذبات صغيرة على الشكل التالي: $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$

يقبل كحل للمعادلة السابقة: $\theta(t) = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$ وتمثل المعادلة الزمنية لحركة النواس البسيط.

يعبر عن الدور الخاص لنواس بسيط بالعلاقة: $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$



الشكل 13



الشكل 14

VII - ظاهرة الرنين الميكانيكي.

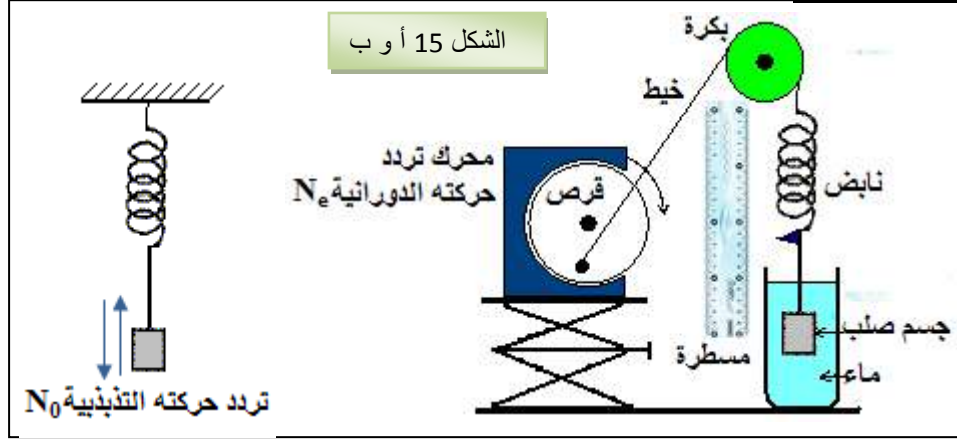
1 - الذبذبات القسرية:

تؤثر الاحتكاكات على التذبذبات الميكانيكية فتصبح حركتها مخددة. ويمكن صيانتها بتعويض الطاقة المبددة بكيفية تتناسب مع طبيعة المتذبذب.

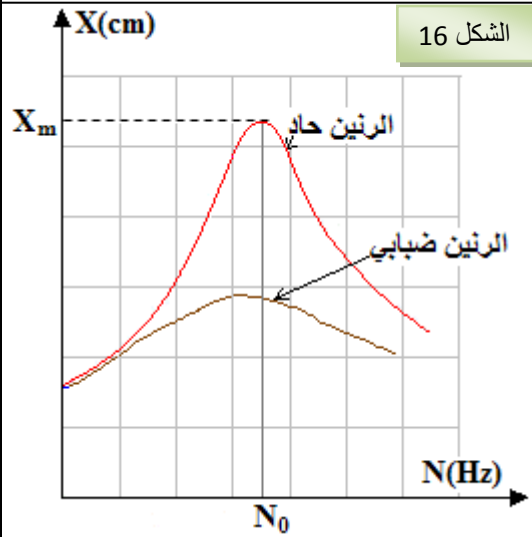
بحيث يتم ربط المتذبذب الميكانيكي مع جهاز يمنحه الطاقة اللازمة لكي تصير حركته مصونة. هذا الجهاز يسمى **بالمثير** (Excitateur)، وهو مجموعة ذات حركة تذبذبية تفرض دورها T_e على المجموعة المتذبذبة (**الرنان** Résonateur) الذي تصبح تذبذباته قسرية.

2 - أمثلة لبعض التذبذبات القسرية

أ - المثال الأول:



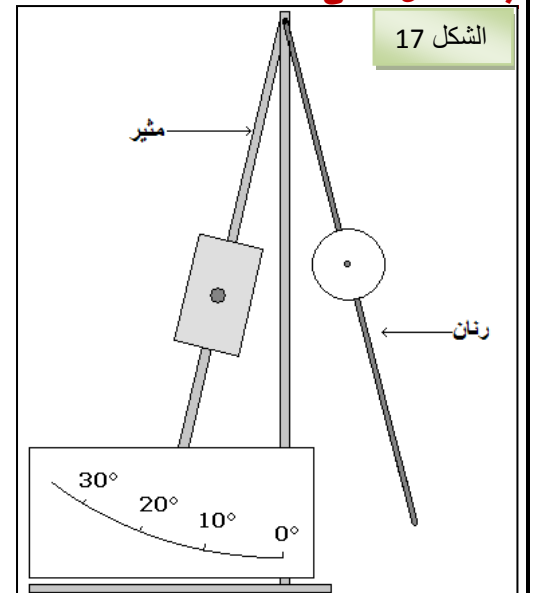
النواس المرن يلعب دور الرنان تردده الخاص N_0 بينما المحرك هو المثير تردده N_e . يتم ربط المتذبذب الميكانيكي مع المحرك الذي يمنحه الطاقة اللازمة لكي تصير حركته مصونة وبذلك يصبح مجبرا على التذبذب بتردد يفرضه المحرك. عند تغيير تردد المحرك نحصل على أقصى وسع لتردد الرنان عندما نضبط تردد المثير (المحرك) على قيمة توافق التردد الخاص للرنان (النواس المرن) $N_0 = N_e$ نقول إن المجموعة في **حالة رنين**.



(الدور الخاص للرنان $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ وتردده الخاص هو $N_0 = \frac{1}{T_0}$).

ملحوظة: كلما كان الخمود ضعيفا كلما كانت ظاهرة الرنين بارزة فنحصل على **الرنين الحاد** الذي يتجلى في كون وسع التذبذبات القسرية يأخذ قيمة كبيرة عند الرنين. وفي حالة الخمود القوي يكون الرنين ضبابيا بحيث يصبح وسع التذبذبات القسرية عند الرنين صغيرا.

ب - المثال الثاني



يتكون هذا الجهاز (الشكل 17) من نواسين وازنين يربط بينهما على مستوى محور دورانها المشترك نابض حلزوني. النواس الذي يحمل السحمة هو المثير. عندما نزيحه عن موضع توازنه ثم نحرره يتذبذب ويجبر النواس الثاني على التذبذب بتردد مساو لتردده، نقول إن تذبذبات هذا الأخير أصبحت قسرية وتغيير تردد الرنان نحصل على الرنين عندما يصبح للنواسين نفس التردد.

في غياب هذا الجهاز يمكن استعمال نواسين وازنين وربطهما بواسطة نابض