تصحيح تمارين حول درس مظاهر الطاقة .

تمرين 1

1 ـ حساب طاقة الوضع المرنة المخزونة في النابض عند انضغاطه :

نعتبر الحالة المرجعية لطاقة الوضع المرنة عندما يكون النابض غير مشوه :

$E_{pe}=\frac{1}{2}kx^2+Cte$ في الحالة المرجعية : $E_{pe}=0$ عند $x=0$ أي أن $Cte=0$ وبالتالي فطاقة الوضع المرنة في هذه الحالة هي : $E_{pe}=\frac{1}{2}kx^2$

قبل قذف الكرة يكون النابض مضغوطا حيث طوله يساوي $\ell_0/2$ أي أن تقلص النابض هو

$x=\left|\frac{\ell_0}{2}-\ell_0\right|=\left|\frac{\ell_0}{2}\right|$ وبالتالي فإن $E_{pe}=\frac{1}{8}k\ell_0^2=6,3.10^{-3}J$

2 ـ شكل الطاقة التي اكتسبتها الكرة : طاقة حركية

السرعة القصوية لإرسال الكرة :

عند مرور الكرة والنابض من النقطة O تكون للكرة سرعة قصوية عند مروره من موضع توازنه حيث أنه حسب المعطيات كل طاقة الوضع المرنة تكتبها الكرة على شكل طاقة حركية :

$$E_{pe}=\frac{1}{2}mv_{max}^2\Rightarrow v_{max}=\sqrt{\frac{2E_{pe}}{m}}=0,36m/s$$

تمرين 2

تعيين الدور الخاص من المبيان : $T_0=0,5s$

لنستنتج عزم قصور الساق :

من خلال المنحنى يتبين أن حركة النواس تذبذبية جيبية وتوصلنا خلال الدرس أن دورها الخاص هو

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}\Rightarrow T_0^2=4\pi^2\frac{J_\Delta}{C}$$

$$J_\Delta=\frac{C.T_0^2}{4\pi^2}=1,25.10^{-7}kg.m^2$$

يلاحظ أن هذه القيمة صغيرة جدا .

2

التسجيل .

3 ـ حساب الطاقة الحركية للنواس عند مروره من موضع توازنه :

موضع التوازن تكون سرعة النواس قصوية وتكون $\theta=0$

بما أن الاحتكاكات مهملة فالطاقة الميكانيكية تكون منحفظة خلال حركة النواس وتعبيرها يكون عند $\theta=\theta_m$ هي $E_m=\frac{1}{2}C\theta_m^2+0=\frac{1}{2}C\theta_m^2$ وعند موضع التوازن تكون $\theta=0$ و $\dot\theta=\dot\theta_m$ أي أن سرعة النواس تكون قصوية وبالتالي $E_m=\frac{1}{2}J_\Delta\dot\theta_m^2+0=\frac{1}{2}J_\Delta\dot\theta_m^2$

انحفاظ الطاقة الميكانيكية يكافئ $\frac{1}{2}J_\Delta\dot\theta_m^2=\frac{1}{2}C\theta_m^2\Rightarrow\dot\theta_m=\theta_m\sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$

تطبيق عددي :

$$\theta_m=10^\circ=\frac{\pi}{18}rad$$

$$\dot\theta_m=2,02rad/s$$

4 ـ حساب طاقة الوضع اللي E_{pt} والطاقة الحركية E_C للنواس عند $\theta = 0,8rad$

لا يمكن لأن القيمة القصوية لهذه الحركة هي $\theta_m = 10° = \frac{\pi}{18} = 0,174rad < 0,8rad$

يمكن ان نتعامل نع هذا التمرين باعتبار $\theta = 0,08rad = 4,5°$

نعلم أن $E_{pt} = \frac{1}{2}C\theta^2 + Cte$ نختار الحالة المرجعية التي يكون فيها القضيب في حالة توازنه المستقر

حيث $\theta = 0$ وبالتالي فالثابتة $Cte = 0$ أي أن $E_{pt} = \frac{1}{2}C\theta^2$

تطبيق عددي : $E_{pt} = 0,64.10^{-7} J$

الطاقة الحركية للنواس هي :

نعلم أ، الطاقة الميكانيكية للنواس هي :

$$E_m = E_{pt} + E_C \Rightarrow E_C = E_m - E_{pt}$$

$$E_C = \frac{1}{2}C\left(\theta_m^2 - \theta^2\right) = 0,024.10^{-5} J$$

تمرين 3

1 ـ دور الذبذبات الصغيرة :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{mgd}}$$

تطبيق عددي : $T_0 = 2,01s$

2 ـ تعبير طاقة الوضع الثقالية للنواس الوازن :

نأخذ الحالة المرجعية $E_{pp} = 0$ عند $z = 0$ أي أننا نختار المحور $(O,\vec{k})$ موجه نحو الأعلى وO متطابقة

مع موضع التوازن G وبالتالي فإن $E_{pp} = mgz + Cte$

في الحالة المرجعية لدينا : $E_{pp} = 0 = 0 + Cte \Rightarrow Cte = 0$ أي أن $E_{pp} = mgz$ بحيث أن

$z = d\left(1 - \cos\theta\right)$ وبالتالي فإن $E_{pp} = mgd\left(1 - \cos\theta\right)$

باعتبار أن الذبذبات ذات وسع صغير فإن $1 - \cos\theta = \frac{\theta^2}{2}$ أي أن $E_{pp} = \frac{1}{2}mgd\theta^2$

3 ـ حساب $\dot{\theta}_{\max}$ السرعة الزاوية القصوى للمتذبذب

تكون للنواس الوازن سرعة زاوية قصوى عند مروره من موضع توازنه أي $\theta = 0$ أي أن $E_{pp\min} = 0$

والطاقة الميكانيكية في هذه الحالة هي $E_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_{\max}^2$

بما أن الاحتكاكات مهملة فإن هناك انحفاظ الطاقة الميكانيكية أي أن الطاقة الميكانيكية للنواس عند $\theta = \theta_{\max}$ $E_m = E_{pp\max} + E_{C\min} = E_{pp\max} + 0 = E_{pp\max}$ تساوي الطاقة الميكانيكة للنواس عند مروره من موضع توازنه أي أن :

$$E_{pp\max} = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_{\max}^2 \Rightarrow \dot{\theta}_{\max} = \sqrt{\frac{2E_{pp\max}}{J_\Delta}}$$

$$\dot{\theta}_{\max} = 0,25rad$$

تمرين 4

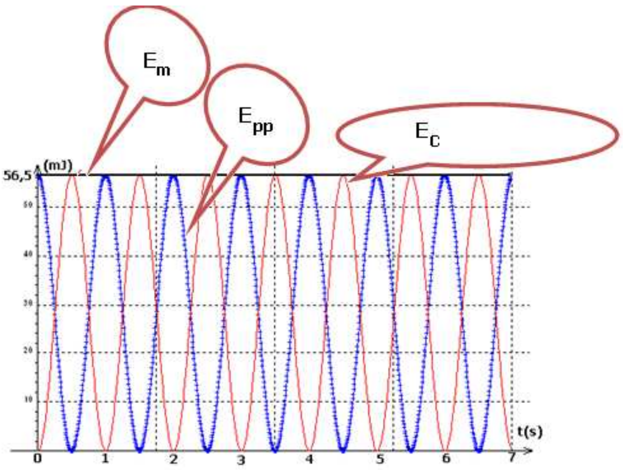
1 ـ تحديد المنحنى الموافق لكل شكل من أشكال الطاقة : أنظر الشكل جانبه

2 ـ قيمة الدور T_0 لحركة النواس الوازن :

يلاحظ من خلال المنحنيات E_{pp} أو E_C دالتين دورتين دور كل منهما هو $T = \frac{T_0}{2}$ أي أن $T_0 = 2T$

وحسب الشكل فإن $T = 1s \Rightarrow T_0 = 2s$

3 ـ أ ـ طول النواس البسيط الذي له نفس الدور الخاص T_0 :



نعلم أن دور النواس البسيط : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ لكي

يكون متواقت مع النواس الوازن الذي دوره $T_0 = 2s$

هو كالتالي : $4 = 4\pi^2\frac{\ell}{g} \Rightarrow \ell = \frac{g}{\pi^2} = 1m$

ب ـ تعبير طاقة الوضع الثقالية القصوى للنواس

البسيط : $E_{pp} = mg\ell(1-\cos\theta)$

بالنسبة لذبذبات ذات وسع صغير لدينا

$1-\cos\theta = \frac{\theta^2}{2}$ أي أن $E_{pp} = \frac{1}{2}mg\ell\theta^2$

ج ـ لنتأكد من أن التقريب المستعمل بالنسبة للزوايا

الصغيرة يتحقق أي قانون التواقت نحسب θ_{max} من

خلال المعادلة التالية: $E_{pp\max} = \frac{1}{2}mg\ell\theta^2_{\max}$ باعتبار أن للنواس البسيط نفس الطاقة الميكانيكية نجد أن

$$\theta_{\max} = \sqrt{\frac{2E_{pp\max}}{mg\ell}} = 0,226rad = 13°$$

تمرين 5

1 ـ تحديد شبه الدور T انطلاقا من المنحنى في الوثيقة جانبه :

من خلال الشكل يتبين أن شبه الدور هو : $T = 1s$

الدور الخاص للنواس هو :

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 1s$ مما يبين أن شبه الدور والدور الخاص للمتذبذب تقريبا متساويان .

2 ـ تحديد المنحنيان (أ) و (ب) :

(أ) الطاقة الحركية للمتذبذب : $E_C = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

و (ب) طاقة الوضع المرنة $E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2$

3 ـ يفسر تناقص الطاقة الميكانيكية E_m نتيجة وجود قوى الاحتكاك المسؤولة عن تبدد الطاقة على شكل طاقة حرارية .

4 ـ أ ـ سرعة G عند اللحظة t_1 :

عند اللحظة t_1 لدينا $x=0$ أي أن G تمر من موضع توازنها وبالتالي فإن السرعة في هذه النقطة قصوية أي أن الطاقة الحركية قصوية وطاقة الوضع منعدمة أي دنوية وبالتالي فالطاقة الميكانيكية

$$E_m(t_1)=E_{C\max}(t_1)\Rightarrow \frac{1}{2}m\dot{x}_{\max}^2=E_m(t_1)$$

$$\dot{x}_{\max}=\sqrt{\frac{2E_m(t_1)}{m}}=\sqrt{\frac{2\times 1,6.10^{-3}}{0,25}}=0,113m/s$$

عند اللحظة t_2 تكون الطاقة الحركية دنوية أي $E_C(t_2)=0\Rightarrow v(t_2)=0$

ب ــ قيمة الشدة $\vec{f}$ عند هاتين اللحظتين :

عند اللحظة t_1 تكون السرعة قصوية أي أن شدة القوة $f=\mu v$ ستكون كذلك قصوية $f_{\max}=\mu.\dot{x}_{\max}$

عند اللحظة t_2 تكون السرعة منعدمة وبالتالي فشدة القوة $\vec{f}$ ستكون منعدمة كذلك .

ج ــ تعليل شكل المنحنى E_m

عندما تكون شدة قوة الاحتكاك منعدمة (مثلا t_2) فإن الطاقة الميكانيكية تنحفظ وسيكون المنحنى E_m عبارة عن جزء من عتبة أفقية (palier) وبعد تزداد شدة القوة أي أن الطاقة الميكانيكية تنقص .

وهذا الشكل ناتج عن أن قوى الاحتكاك غير ثابتة .

تمرين 6

1 ــ تعبير الطاقة الحركية للمجموعة { الجسم الصلب ، النابض }

$$E_C=E_C(S_1)+E_C(R)$$

بما أن كتلة النابض مهملة فإن طاقته الحركية منعدمة $E_C(R)=0$ وبالتالي فإن الطاقة الحركية للمجموعة هي : $E_C=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$

2 ــ تعبير طاقة الوضع للمجموعة :

$E_P=E_{pp}+E_{pe}$ بحيث أن E_{pp} طاقة الوضع الثقالية للجسم وهي منعدمة لأنه حسب المعطيات أن $E_{pp}=0$ في المستوى الذي يمر من G (حركة G أفقية وبالتالي فإن $z=0$) و E_{pe} طاقة الوضع المرنة للنابض وهي : $E_{pe}=\frac{1}{2}kx^2+Cte$ تمثل x إطالة النابض عند اللحظة t لكون أن $\Delta\ell_0=0$ لأن النابض أفقي .

حسب الحالة المرجعية أن $E_{pe}=0$ عند $x=0$ أي أن $Cte=0$ وبالتالي فإن $E_p=\frac{1}{2}kx^2$

نستنتج الطاقة الميكانيكية للمجموعة :

$$E_m=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2$$

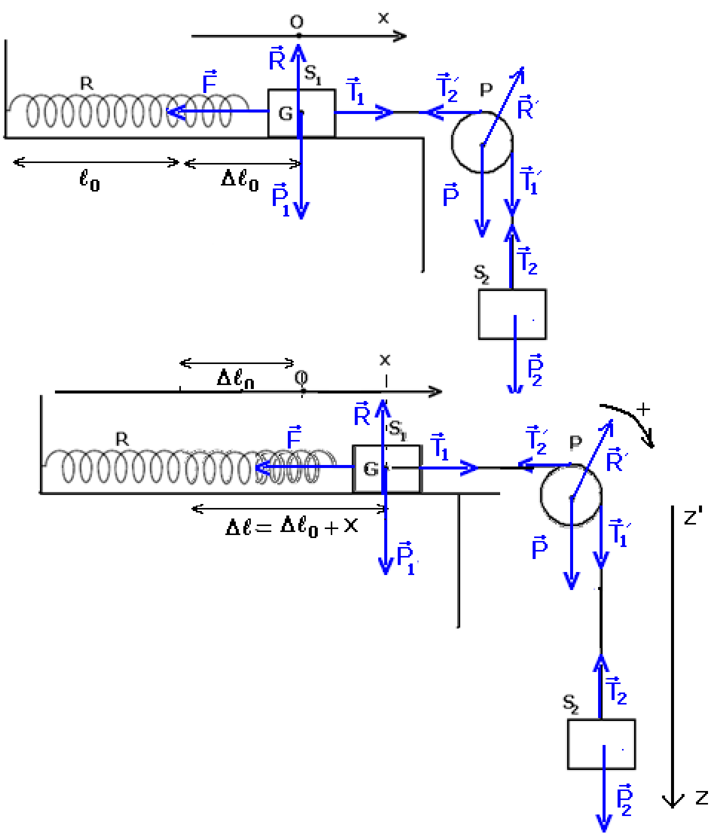
3 ــ المعادلة التفاضلية لحركة المتذبذب المرن :

بما أن الاحتكاكات مهملة فإن الطاقة الميكيانيكية تنحفظ أي أن $\frac{dE_m}{dt}=0$ وبالتالي فإن :

$$kx\dot{x}+m\dot{x}\ddot{x}=0\Rightarrow kx+m\ddot{x}=0\quad(\dot{x}\neq 0)$$

$$\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$$

II ـ 1 إطالة النابض عند التوازن :



من خلال التبيانة ، وبتطبيق شرطا التوازن على كل من الجسم S_1 و الجسم S_2 في حركة إزاحة والبكرة وهي في حركة دوران نحصل على :

دراسة توازن الجسم S_1 :

القوى المطبقة على S_1 : $\vec{P}_1$ وزن الجسم و $\vec{R}$ تأثير السطح الأفقي و $\vec{T}_1$ توتر الخيط و $\vec{F}$ قوة ارتداد النابض .

$$\vec{P}_1+\vec{T}_1+\vec{R}+\vec{F}=\vec{0}$$

نسقط هذه العلاقة على $(O,\vec{i})$:

$$(1)\quad -k\Delta\ell_0+T_1=0$$

دراسة توازن الجسم S_2 :

القوى المطبقة على الجسم S_2 : $\vec{P}_2$ وزن الجسم S_2 ، $\vec{T}_2$ توتر الخيط .

$$\vec{P}_2+\vec{T}_2=\vec{0}$$

إسقاط العلاقة على $(O,\vec{k})$: $mg-T_2=0 \quad (2)$

دراسة توازن البكرة (قابلة للدوران حول محور ثابت)

القوى المطبقة على البكرة : $\vec{P}$ وزن البكرة ، $\vec{R}'$ تأثير المحور على البكرة ، $\vec{T}_1'$ توتر الخيط و $\vec{T}_2'$ توتر الخيط .

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P})+\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}')+\mathcal{M}_\Delta(\vec{T}_1')+\mathcal{M}_\Delta(\vec{T}_2')=0$$

$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P})=0$ و $\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}')=0$ لكون خطي تأثيرهما يمر من مجرى البكرة .

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{T}_1')+\mathcal{M}_\Delta(\vec{T}_2')=0 \Rightarrow -T_1'.r+T_2'.r=0$$

$$T_1'=T_2'$$

وبما أن الخيط غير قابل الامتداد وكتلته مهملة : $T_1'=T_1$ و $T_2'=T_2$ وبالتالي فإن $T_1=T_2$

ومن العلاقتين (1) و (2) نستنتج أن $-k\Delta\ell_0+mg=0 \Rightarrow \Delta\ell_0=\dfrac{mg}{k}$

2 ـ 1 الدور T_0 للمتذبذب وهو حسب التسجيل لدينا $T_0=30.\Delta t=1,2s$

2 ـ 2 الوسع هو حسب المبيان : $x_m=2cm=2.10^{-2}m$

3 ـ 1 المعادلة التفاضلية لحركة الجسم S_1

دراسة حركة الجسم S_1 وهو في حركة إزاحة :

القوى المطبقة على S_1 : $\vec{P}_1$ وزن الجسم و $\vec{R}$ تأثير السطح الأفقي و $\vec{T}_1$ توتر الخيط و $\vec{F}$ قوة ارتداد النابض .

نطبق القانون الثاني لنيوتن في مرجع مرتبط بالأرض نعتبره غاليليا :

$$\vec{P}_1+\vec{T}_1+\vec{R}+\vec{F}=m.\vec{a}$$

نسقط هذه العلاقة على $\left(O,\vec{i}\right)$: $-k\Delta\ell+T_1=m_1.\ddot{x}$ بحيث أن $\Delta\ell$ هي إطالة النابض عند اللحظة t

وهي حسب الشكل :

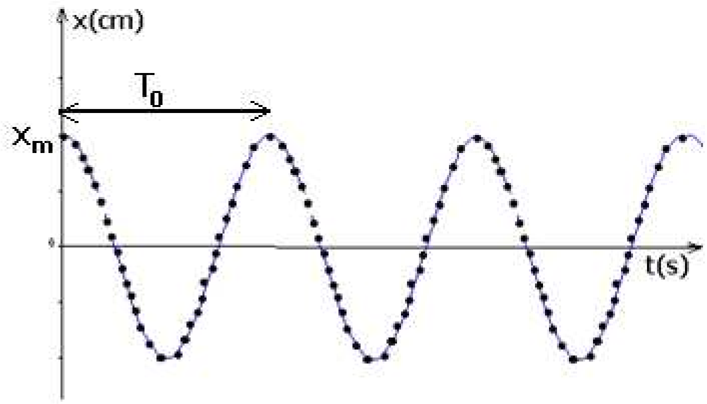
$\Delta\ell=\Delta\ell_0+x$ أي أن العلاقة السابقة تصبح : $-k\left(\Delta\ell_0+x\right)+T_1=m_1.\ddot{x}$

دراسة حركة الجسم S_2 :

القوى المطبقة على الجسم S_2 :

$\vec{P}_2$ وزن الجسم S_2 ، $\vec{T}_2$ توتر الخيط

.



نطبق القانون الثاني لنيوتن في مرجع مرتبط بالأرض نعتبره غاليليا :

$$\vec{P}_2+\vec{T}_2=m_2\vec{a}$$

إسقاط العلاقة على $\left(O,\vec{k}\right)$:

$$m_2g-T_2=m_2\ddot{z} \quad (2)$$

دراسة حركة البكرة (حركة دوران حول محور ثابت)

القوى المطبقة على البكرة : $\vec{P}$ وزن البكرة ، $\vec{R}'$ تأثير المحور على البكرة ، $\vec{T}_1'$ توتر الخيط و $\vec{T}_2'$ توتر الخيط .

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك في مرجع مرتبط بالأرض نعتبره غاليليا :

$$\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{P}\right)+\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{R}'\right)+\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{T}_1'\right)+\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{T}_2'\right)=J_\Delta.\ddot{\theta}$$

$\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{P}\right)=0$ و $\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{R}'\right)=0$ لكون خطي تأثيرهما يمر من مجرى البكرة .

$$\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{T}_1'\right)+\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{T}_2'\right)=J_\Delta.\ddot{\theta}\Rightarrow -T_1'.r+T_2'.r=J_\Delta.\ddot{\theta}$$

بما أن الخيط غير قابل الانزلاق على مجرى البكرة فإن $\ddot{x}=\ddot{z}=r\ddot{\theta}\Rightarrow\ddot{\theta}=\dfrac{\ddot{x}}{r}$

$$-T_1'+T_2'=J_\Delta\frac{\ddot{x}}{r^2}$$

وبما أن الخيط غير قابل الامتداد وكتلته مهملة : $T_1'=T_1$ و $T_2'=T_2$ بالتالي $-T_1+T_2=J_\Delta\dfrac{\ddot{x}}{r^2}$ (3)

نعوض العلاقتين (1) و (2) في العلاقة (3) نستنتج أن

$$-\left(m_1.\ddot{x}+k\left(\Delta\ell_0+x\right)\right)+\left(m_2g-m_2\ddot{x}\right)=J_\Delta\frac{\ddot{x}}{r^2}$$

$$\ddot{x}\left(m_1+m_2+\frac{J_\Delta}{r^2}\right)-m_2g+k\Delta\ell_0+kx=0$$

$$-m_2g+k\Delta\ell_0=0\Rightarrow\ddot{x}\left(m_1+m_2+\frac{J_\Delta}{r^2}\right)+kx=0$$

$$m_1=m_2=m$$

$$J_\Delta=\frac{1}{2}Mr^2=mr^2$$

$$3m\ddot{x}+kx=0\Rightarrow\ddot{x}+\frac{k}{3m}x=0$$

3 ـ 2 المعادلة الزمنية لحركة المتذبذب :

بما أن المعادلة التفاضلية خطية ومن الدرجة الثانية فإنها تقبل حلا جيبيا على الشكل التالي

$$x(t)=x_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$$

بحيث أن $x_m=2.10^{-2}m$ و $T_0=1,2s$

تحديد φ ، عند اللحظة $t=0$ لدينا

$$x(0)=x_m=x_m\cos\varphi\Rightarrow\cos\varphi=1$$

$$\varphi=0$$

5 ـ صلابة النابض :

من خلال المعادلة التفاضلية فإن الدور الخاص لحركة S_1 هو :

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{3m}{k}}\Rightarrow k=\frac{12\pi^2.m}{T_0^2}=16,7N/m$$

تمرين 7

1 ـ المعادلة التفاضلية لحركة القضيب :

بنفس الطريقة المتبعة في التمارين السابقة نتوصل إلى المعادلة التفاضلية التالية

$$\ddot{\theta}+\frac{C}{J_\Delta}\theta=0$$

2

طاقة الوضع للمجموعة قضيب وسلك هي : $E_P=E_{pt}=\frac{1}{2}C\theta^2+Cte$ وحسب الحالة المرجعية فإن

$Cte=0$ أي أن الطاقة الميكانيكية للقضيب هي :

$$E_m=\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}C\theta^2$$

3 ـ 1 القيمة القصوى لطاقة الوضع اللي : $E_{Pt\max}=3.10^{-3}J$

3 ـ 2 الوسع $\theta_m=\frac{\pi}{4}rad$

3 ـ 3 ثابتة اللي للسلك :

$$E_{Pt\max}=\frac{1}{2}C\theta_{\max}^2\Rightarrow C=\frac{2E_{Pt\max}}{\theta_{\max}^2}9,72.10^{-3}N.m/rad$$

4 ـ المعادلة الزمنية لحركة القضيب : $\theta=\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$

نحسب الدور الخاص للمتذبذب : $T_0=2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}=2\pi\sqrt{\frac{4.10^{-4}}{9,7.10^{-3}}}=1,3s$

بالنسبة ل φ فحسب الشروط البدئية أنه عند اللحظة $t=0$ لدينا $\theta(0)=\theta_m=\theta_m\cos\varphi\Rightarrow\varphi=0$

وبالتالي فالمعادلة الزمنية هي : $\theta=\frac{\pi}{4}\cos(5t)$

5

القضيب فإن المجموعة المحصل عليها تكون متذبذب ميكانيكي وهو نواس اللي حيث معادلته التفاضلية

على الشكل التالي : $\ddot{\theta}+\frac{C}{J'_\Delta}\theta=0$ بحيث أن J'_Δ عزم قصور المجموعة وهي حسب المعطيات

أي أن $J'_{\Delta} = J_{\Delta} + 2m\left(\frac{\ell}{4}\right)^2$ المعادلة التفاضلية تصبح على الشكل التالي :

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{J_{\Delta} + 2m\left(\frac{\ell}{4}\right)^2}\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{C}{J_{\Delta} + \frac{m\ell^2}{8}}\theta = 0$$

$$T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_{\Delta} + \frac{m\ell^2}{8}}{C}} \Rightarrow T_0'^2 = \frac{4\pi^2\left(J_{\Delta} + \frac{m\ell^2}{8}\right)}{C} \Rightarrow CT_0'^2 = 4\pi^2 J_{\Delta} + 4\pi^2\frac{m\ell^2}{8}$$

$$m = \frac{2CT_0'^2}{10\ell} - \frac{8J_{\Delta}}{\ell^2} = 2{,}9kg$$