السقوط الرأسي لجسم صلب

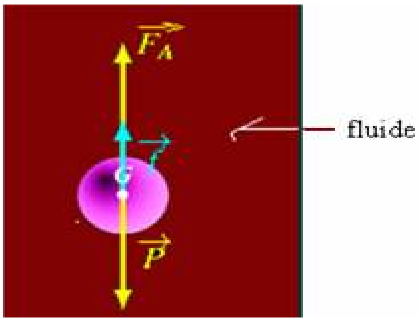
(خاص بمسلكي ع الرياضية والفيزيائية)

I- القوى المطبقة على جسم من طرف مائع :

1) القوى المطبقة من طرف مائع:

الجسم المغمور في مائع يخضع إلى ثلاث قوى :

$\vec{P}$: قوة الثقالة (أي وزن الجسم). و $\vec{F}_A$: دافعة أرخيمدس و: $\vec{f}$: قوة الاحتكاك المائع.



2) قوة الثقالة : Force de pesanteur

تخضع الأجسام في مجال الثقالة إلى قوة الثقالة، وهي القوة المطبقة عليها من طرف الأرض وتسمى بالوزن $\vec{P}$.

*العلاقة بين شدة وزن الجسم وشدة الثقالة: $P = m.g$.

* $\vec{g}$: متجهة مجال الثقالة موجهة نحو مركز الأرض(أي رأسية نحو الأسفل) ، وتحتفظ في نفس الموضع بنفس الشدة.

وحدة شدة الثقالة g في النظام العالمي للوحدات هي : N/Kg أو m/s^2.

* القوة $\vec{P} = m.\vec{g}$ تطبق في مركز القصور G للجسم الصلب .

3)دافعة أرخيمدس: La poussée d'Archimède

يخضع كل جسم مغمور كليا أو جزئيا في مائع لقوة تماس ضاغطة تسمى دافعة أرخميدس، وهي رأسية، موجهة نحو الأعلى ، شدتها تساوي وزن حجم السائل المزاح. $F_A = \rho_f.V.g$

القوة $\vec{F}_A = -\rho_f.V.\vec{g}$ تطبق في مركز قصور السائل المزاح .

ρ_f : الكتلة الحجمية للمائع ب : $(kg.m^{-3})$.

V : الحجم المزاح للمائع (m^3) volume du liquide déplacé

g : شدة الثقالة ب: (N/kg) أو: (m/s^2) .

4) قوة الاحتكاك المائع:

تكافئ قوى الاحتكاك التي يطبقها المائع على الجسم الصلب المغمور داخله قوة وحيدة $\vec{f}$ تسمى قوة الاحتكاك المائع، تطبق في مركز القصور G للجسم، معاكسة لمتجهة السرعة $\vec{v}$: $\vec{f} = -k.\vec{v}^n$. تتعلق بطبيعة السائل وبشكل الجسم الصلب.

منظمها : $f = k.v^n$

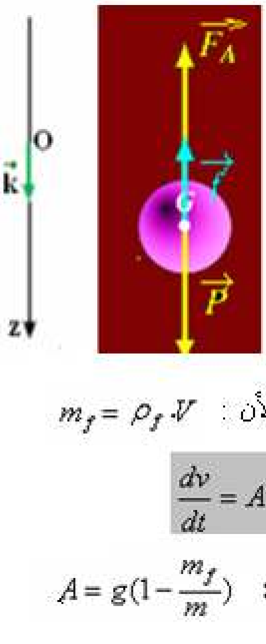
ملحوظة: عموما إذا كانت السرعة صغيرة نأخذ : $n = 1$ فتصبح : $f = k.v$ في هذه الحالة تتعلق الثابتة k بلزوجة السائل.

و إذا كانت السرعة كبيرة نأخذ : $n = 2$ فتصبح : $f = k.v^2$ في هذه الحالة تتعلق الثابتة k بالكتلة الحجمية للسائل.

II- السقوط الرأسي لجسم صلب باحتكاك :

1) المعادلة التفاضلية التي تحققها السرعة :

نعتبر جسما صلبا كتلته ك في حالة سقوط رأسي في مائع.



* المجموعة المدروسة{الكرية}

* جرد القوى : الكرية تخضع للقوى التالية:

$\vec{P}$:قوة الثقالة.(أي وزن الجسم) $\vec{P} = m.\vec{g}$ شدتها : $P = m.g$

$\vec{F}_A$: دافعة أرخميدس . $\vec{F}_A = -\rho_f.V.\vec{g}$ شدتها : $F_A = \rho_f.V.g$

$\vec{f}$: قوة الاحتكاك المائع $\vec{f} = -k.\vec{v}^n$. شدتها : $f = k.v^n$

*اختيار المعلم المناسب : نعتبر معلما (o,z) موجها نحو الأسفل (لأن الحركة مستقيمية ورأسية).

* تطبيق القانون الثاني لنيوتن : $\Sigma\vec{F} = m.\vec{a}_G$ أي : $\vec{P} + \vec{F}_A + \vec{f} = m.\vec{a}_G$

* بالإسقاط على المحور oz $P - F_A - f = m.a_z$ $\Longleftarrow$ $\boxed{m.g - m_f.g - k.v^n = m.\dfrac{dv}{dt}}$ لأن : $m_f = \rho_f.V$

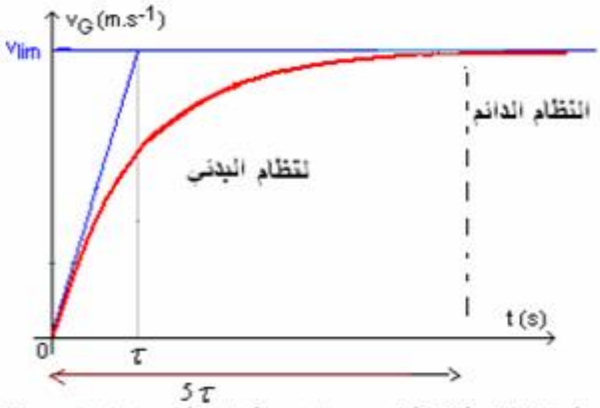
المعادلة التفاضلية تصبح كما يلي: $\dfrac{dv}{dt} = g(1 - \dfrac{m_f}{m}) - \dfrac{k}{m}v^n$ ويمكن كتابتها كما يلي : $\dfrac{dv}{dt} = A - B.v^n$

مع : $B = \dfrac{k}{m}$ و : $A = g(1 - \dfrac{m_f}{m})$

2) المقادير المميزة للحركة :

أ) النظام الدائم:

تمكن الدراسة التجريبية من رسم المنحنى الممثل لتغيرات سرعة الكرية بدلالة الزمن :



في البداية تتزايد سرعة الكرية إلى أن تبلغ قيمة ثابتة تسمى :السرعة الحدية يرمز إليها ب: v_ℓ فتخضع حركة الكرية إلى نظام يسمى النظام الدائم .

عندما يتحقق النظام الدائم ، تصبح السرعة v للكرية ثابتة وبذلك يصبح $\frac{dv}{dt}=0$ ومن خلال (1) يصبح لدينا : $A-B.v_\ell^{\,n}=0$

أي : $v_\ell=\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{n}}$ ونحصل على تعبير السرعة الحدية : $v_\ell=\left[\frac{g}{k}(m-m_f)\right]^{\frac{1}{n}}=\left[\frac{g}{k}(\rho-\rho_f).V\right]^{\frac{1}{n}}$

حيث ρ الكتلة الحجمية للكرية ρ_f الكتلة الحجمية للسائل . V حجم الكرية.

ب) النظام البدني : التسارع البدني للكرية.

في بداية السقوط تتزايد سرعة الكرية وتسارعها : $a=\frac{dv}{dt}=(1-\frac{m_f}{m}).g-\frac{k.v^n}{m}$ يتناقص لأن قوة الاحتكاك المائع تتزايد خلال حركة الكرية.

وفي اللحظة $t=0$: تسارع الكرية البدني : $a_o=(1-\frac{m_f}{m}).g$ لأن $v_o=0$.

مبيانيا قيمة التسارع البدني تساوي قيمة المعامل الموجه للمماس للمنحنى $v=f(t)$ عند اللحظة : $t=o$.

ج) الزمن المميز للحركة:

يتقاطع الخط المماس للمنحنى $v=f(t)$ مع الخط المقارب للمنحنى في نقطة أفصولها τ تسمى الزمن المميز للحركة .

تحدد قيمة τ بالعلاقة : $v_{lim}=a_o\tau$.

بمعرفة قيمة الزمن المميز للحركة τ يمكن تقدير مدة النظام البدني و هي تساوي حوالي : 5τ.

3) حل المعادلة التفاضلية باستعمال طريقة أولير:

3) حل المعادلة التفاضلية باستعمال طريقة أولير:

طريقة أولير طريقة رقمية تكرارية تمكن من حل المعادلة التفاضلية .ويستوجب استعمال هذه الطريقة معرفة سرعة مركز قصور الجسم في لحظة معينة ، والتي غالبا ما تكون هي السرعة البدئية v_o في اللحظة $t=0$.

في طريقة أولير يتم توظيف العلاقتين التاليتين : $v_{i+1}=v_i+a_i\Delta t$ و : $a_i=A-B.v_i^{\,n}$ Δt خطوة الحساب.

نحدد : $a_o=A-B.v_o^{\,n}$ ثم نستنتج : $v_1=v_o+a_o\Delta t$

نحدد : $a_1=A-B.v_1^{\,n}$ ثم نستنتج : $v_2=v_1+a_1\Delta t$

نحدد : $a_2=A-B.v_2^{\,n}$ ثم نستنتج : $v_3=v_2+a_2\Delta t$

نحدد : $a_3=A-B.v_3^{\,n}$ ثم نستنتج : $v_4=v_3+a_3\Delta t$

ملحوظة: اختيار خطوة الحساب .

اختيار خطوة الحساب Δt يكتسي أهمية بالغة في طريقة أولير ، فكلما كانت قيمتها صغيرة ،كلما كانت النتائج النظرية قريبة من النتائج التجريبية.

عموما نأخذ الخطوة $\Delta t=\frac{\tau}{10}$ لكي لا نتجاوز السرعة الحدية للكرية.

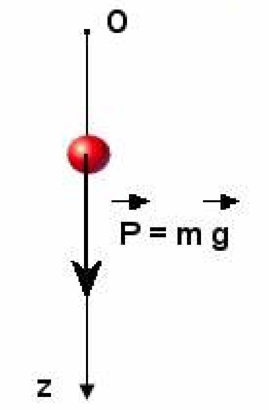
III - دراسة السقوط الحر الرأسي لجسم صلب :

1) تعريف السقوط الحر:

السقوط الحر لجسم صلب هو سقوطه تحت تأثير وزنه فقط وبدون سرعة بدئية .
و يتم ذلك في الفراغ المطلق و في الهواء عندما يكون للجسم شكلا انسيابيا وكثافة عالية بحيث يمكن إهمال تأثير الهواء عليه.
إذا كان المسار رأسيا نقول أن السقوط الحر رأسي.

2) دراسة السقوط الحر لجسم صلب:

* المجموعة المدروسة{الكرية}
*اختيار المعلم المناسب : نعتبر معلما (o,z) موجها نحو الأسفل (لأن الحركة مستقيمة).
* جرد القوى : الكرية تخضع لوزنها $\vec{P}$ فقط. (نهمل تأثير الهواء أمام تأثير وزن الجسم)



* تطبيق القانون الثاني لنيوتن: $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}_G \Leftarrow \vec{P} = m.\vec{a}_G$

أي: $m.\vec{g} = m.\vec{a}_G \Leftarrow \vec{g} = \vec{a}_G$ (1)

*اسقاط العلاقة (1) على المحور oz: $a_z = g$

التسارع ثابت والمسار مستقيمي ، إذن حركة الجسم مستقيمية متغيرة بانتظام.

*المعادلة التفاضلية للحركة: نعلم أن : $a_z = \frac{dv_z}{dt}$ ولدينا : $a_z = g$ إذن: $\frac{dv_z}{dt} = g$ وهي المعادلة التفاضلية.

المعادلة التفاضلية لحركة مركز قصور جسم في سقوط حر بدون سرعة بدئية تكتب على الشكل التالي: $\frac{dv_z}{dt} = g$

*دالة السرعة: $\frac{dv_z}{dt} = g$: إذن الدالة التي مشتقتها g تكتب : $v_z = gt + C^{te}$

خلال السقوط الحر السرعة البدئية للجسم منعدمة : $C^{te} = 0$ وبالتالي : (2) $v_z = gt$ وهي دالة السرعة.

*المعادلة الزمنية للحركة:

بما أن: $v_z = \frac{dz}{dt}$ فإن العلاقة (2) تكتب كما يلي : $\frac{dz}{dt} = gt$ إذن الدالة التي مشتقتها gt تكتب: $z = \frac{1}{2}gt^2 + C^{te}$

نحدد الثابتة بالرجوع على الشروط البدئية : لدينا عند اللحظة $t = 0$: $z = 0$ لأن الجسم انطلق من الأصل 0 للمحورoz

، إذن: $C^{te} = 0$ وبالتالي: $z = \frac{1}{2}gt^2$ وهي المعادلة الزمنية لحركة جسم في سقوط الجسم .

تعميم:

بالنسبة لمعلم رأسي (o,z) موجه نحو الاسفل ، تكتب معادلات حركة مركز قصور جسم صلب في سقوط راسي حر كما يلي :

$$a_G = g$$
$$v_G = gt + v_o$$
$$z_G = \frac{1}{2}gt^2 + v_o.t + z_o$$

بالنسبة ل: $v_o=0$ و: $z_o=0$ لدينا : $z = \frac{1}{2}.g.t^2$

ذ.عبد الكريم سبيرو

لا تنسونا من صالح دعائكم ونسأل الله لكم العون والتوفيق