

حركة دوران جسم صلب حول محور ثابت

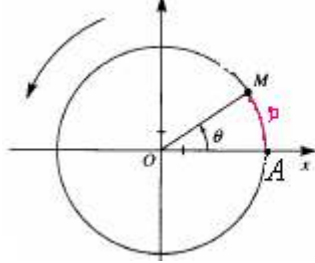
I الأفضول الزاوي - السرعة الزاوية - التسارع الزاوي:

(1) تذكير:

يكون جسم صلب، غير قابل للتشويه، في حركة دوران حول محور ثابت Δ إذا كانت جميع نقطه لها حركة دائرية ممرزة على هذا المحور (باستثناء النقط المنتمية للمحور Δ).

(2) معلمة موضع المتحرك:

تتم معلمة موضع المتحرك، في حالة حركة الدوران، باستعمال الأفضول المنحني أو الأفضول الزاوي.



$$s = \widehat{AM} \text{ الأفضول المنحني}$$

$$\theta = (\overline{OA}, \overline{OM}) \text{ الأفضول الزاوي}$$

العلاقة بين الأفضول المنحني والأفضول الزاوي : $s = R.\theta$

(3) السرعة الزاوية:

السرعة الزاوية هي مشتقة الأفضول الزاوي بالنسبة للزمن : $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ ووحدتها في النظام العالمي للوحدات : rad/s .

السرعة الخطية هي مشتقة الأفضول المنحني بالنسبة للزمن : $v = \frac{ds}{dt}$ ووحدتها في النظام العالمي للوحدات : m/s .

بما أن : $s = R.\theta$ فإن : $\dot{s} = R.\dot{\theta}$ وهي العلاقة بين السرعة الخطية والسرعة الزاوية. (مع $\dot{s} = v$)

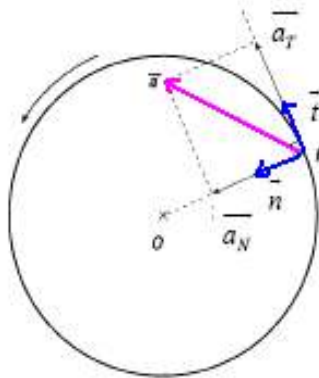
$$\dot{\theta}_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\tau} \text{ ملحوظة: مبيانيا : السرعة الزاوية اللحظية:}$$

(4) التسارع الزاوي: (أ) تعريف:

التسارع الزاوي هو مشتقة السرعة الزاوية بالنسبة للزمن : $\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt}$. ب: ra/s^2 .

$$\ddot{\theta}_i = \frac{\dot{\theta}_{i+1} - \dot{\theta}_{i-1}}{2\tau} \text{ ملحوظة: مبيانيا : التسارع الزاوي اللحظي:}$$

(ب) التسارع المماسي والتسارع المنظمي:



في معلم فرييني، متجهة التسارع: $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$

أي: لها مركبتين : - مركبة مماسية $a_T = \frac{dv}{dt}$

- ومركبة منظمية: $a_N = \frac{v^2}{r}$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = r\ddot{\theta}$$

$$a_N = r\dot{\theta}^2$$

بما أن: $s = r\theta$ فإن: $v = r\dot{\theta}$ $\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = r\ddot{\theta}$

II العلاقة الأساسية للحريك في حالة الدوران حول محور ثابت:

1 نص العلاقة:

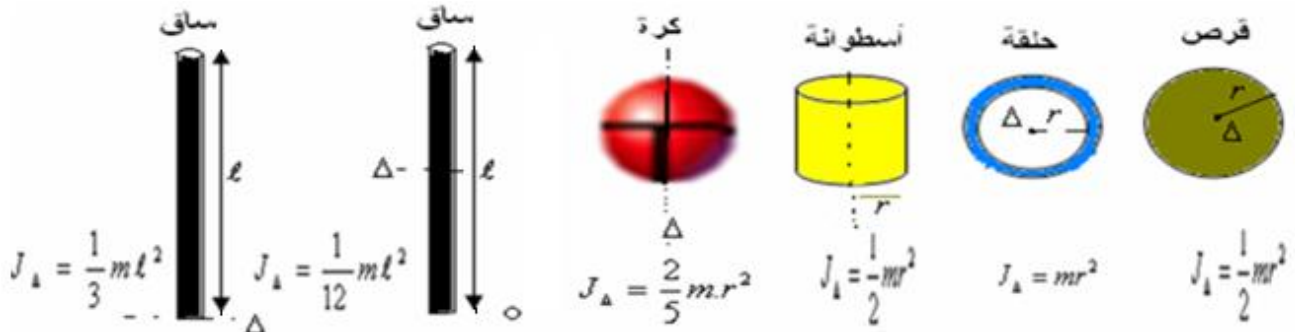
في معلم مرتبط بالأرض ، وبالنسبة لمحور ثابت (Δ) ، مجموع عزوم القوى المطبقة على جسم صلب في دوران حول محور ثابت ، يساوي ، في كل لحظة ، جداء عزم القصور J_{Δ} والتسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ للجسم.

$$\Sigma M_{\Delta} \vec{F} = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$$

J_{Δ} : عزم قصور الجسم ب: $kg.m^2$

التسارع الزاوي ب: $\ddot{\theta}$ rad/s^2

(2) تعابير عزم القصور لبعض الأجسام ذات أشكال هندسية بسيطة:

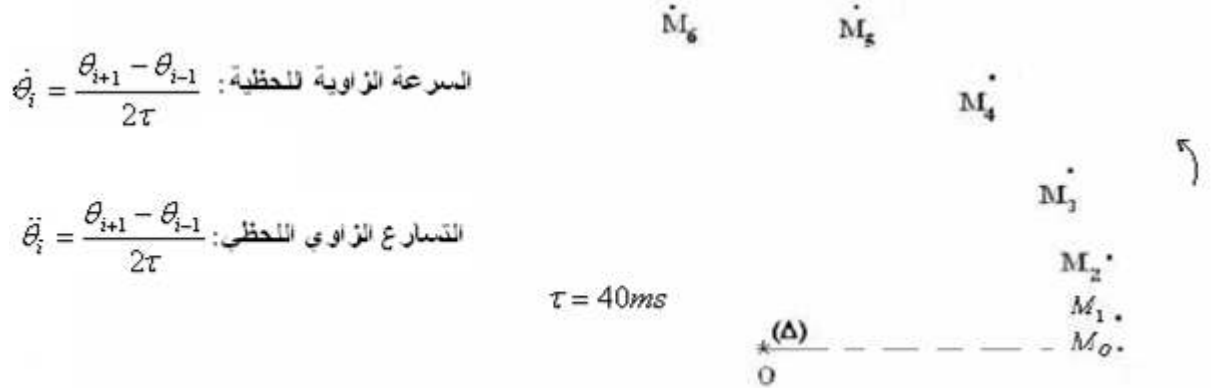


3 (التحقق التجريبي من العلاقة: $\Sigma M_{\Delta} \vec{F} = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$)

نستعمل المنضدة الهوائية ونجز التركيب التالي:



ندير القرص حول محور دورانه Δ ثم نحرره فنحصل على التسجيل التالي:



$$\dot{\theta}_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\tau}$$

$$\ddot{\theta}_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\tau}$$

$$\tau = 40ms$$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\theta_2 - \theta_0}{2\tau} = \frac{15^\circ - 0^\circ}{2 \times 20 \times 10^{-3} s} = \frac{15 \times \pi}{180} \frac{rad}{0.04} = 6.54 rad/s$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\theta_3 - \theta_1}{2\tau} = \frac{30^\circ - 5^\circ}{2 \times 20 \times 10^{-3} s} = \frac{25 \times \pi}{180} \frac{rad}{0.04} = 10.9 rad/s$$

نتخذ المحور ox المار من M_0 محورا مرجعا للأفاصل الزاوية ولحظة تسجيل M_0 أصلا للتواريخ.

القرص خلال حركته يخضع إلى تأثير القوى التالية: وزنه \vec{P} ، تأثير الخيط \vec{T} تأثير سطح التماس \vec{R} .

لنعين مجموع عزوم القوى : $\Sigma M_{\Delta} \vec{F} = M_{\vec{P}_{\Delta}} + M_{\vec{R}_{\Delta}} + M_{\vec{T}_{\Delta}} = M_{\vec{T}_{\Delta}}$ لأن \vec{P} و \vec{R} تتقاطعان مع محور الدوران \Leftarrow عزم كل منهما منعدم.

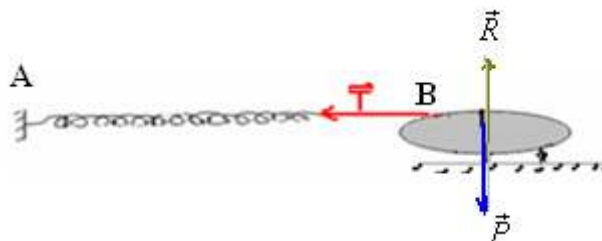
$$\Sigma M_{\Delta} \vec{F} = T_i \cdot d_i$$

وبذلك يمكن تحديد مجموع العزوم في كل لحظة t_i :

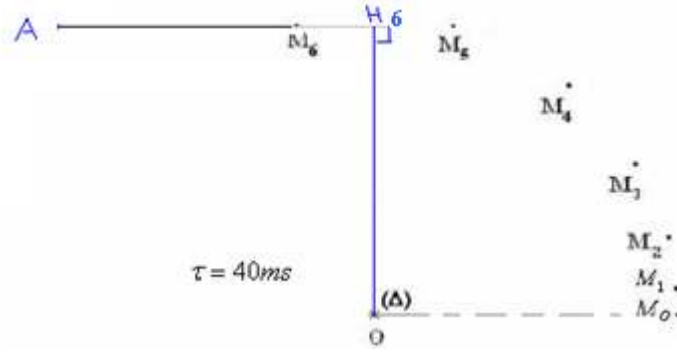
بمعرفة صلابة النابض وطوله الأصلي ،

نحصل على توتره في كل لحظة:

$$T_i = K(\ell_i - \ell_0) \Leftarrow \text{مع } \ell_i = AB$$



. $d_i = AH_i$ هي المسافة الفاصلة بين خط تأثير القوة T_i ومحور الدوران Δ .



ندرج النتائج في الجدول التالي :

M_6	M_5	M_4	M_3	M_2	M_1	M_0	الموضع M_i
							التاريخ t_i
							$\theta_i (rad)$
							$\dot{\theta}_i (rad / s)$
							$\ddot{\theta}_i$
							$\sum M\vec{F}$
							$\frac{\sum M\vec{F}}{\ddot{\theta}}$

يتضح من خلال نتائج التجربة ما يلي : $\frac{\sum M\vec{F}}{\ddot{\theta}} = C^{te}$

بمعرفة كتلة القرص وشعاعه ، نحصل على قيمة عزم قصوره : $J_{\Delta} = \frac{1}{2}mr^2$ ونستنتج تجريبيا أن : $\frac{\sum M\vec{F}}{\ddot{\theta}} = J_{\Delta}$

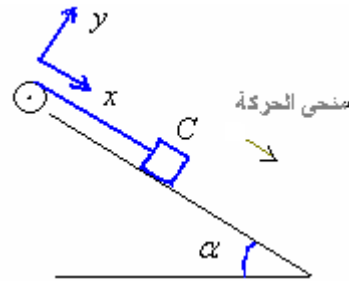
$$\Sigma M_{\Delta}\vec{F} = J_{\Delta}.\ddot{\theta}$$

وبالتالي :

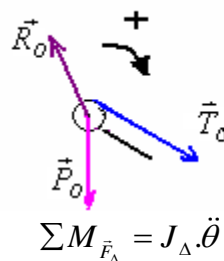
تطبيقات

(1) تطبيق رقم 1:

نعتبر مجموعة ميكانيكية * بكرة متجانسة P شعاعها r وكتلتها m_p ، قابلة للدوران حول محورها الأفقي والثابت. * جسم صلب C كتلته m_c موضوع فوق مستوى مائل بزواوية α . * خيط f غير قابل للمد ملفوف حول مجرى البكرة وطرفه الآخر مثبت بالجسم C . (انظر الشكل)



نحرر المجموعة فينزلق الجسم C نحو الأسفل. (نعتبر الاحتكاكات مهملة).
عبر عن تسارع المجموعة بدلالة g ، α ، m_c و m_p .



* المجموعة المدروسة (البكرة) :
* جرد القوى : تخضع البكرة للقوى التالية :

- \vec{P}_O : وزنها.
- \vec{R}_O : تأثير محور الدوران.
- \vec{T}_O : القوة المطبقة من طرف الخيط.

* تطبيق العلاقة الأساسية للتريك على البكرة :

$$(1) M_{\Delta}(\vec{P}_O) + M_{\Delta}(\vec{R}_O) + M_{\Delta}(\vec{T}_O) = J_{\Delta}.\ddot{\theta}$$

بمأن خطي تأثير القوتين \vec{P} و \vec{R} ينقاطعان مع محور الدوران Δ ، فإن عزم كل منهما منعدم .

أي : $M_{\Delta}(\vec{P}_O) = 0$ و $M_{\Delta}(\vec{R}_O) = 0$

وباعتبار المنحى الموجب لدوران البكرة ، يكون تعبير عزم القوة \vec{T}_O بالنسبة لمحور الدوران Δ هو : $M_{\Delta}(\vec{T}_O) = +T_O.r$

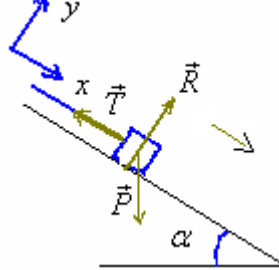
وبالتالي العلاقة (1) تصبح : $T_O.r = J_{\Delta}.\ddot{\theta}$ أي : $T_O = \frac{J_{\Delta}.\ddot{\theta}}{r}$ (2)

*المجموعة المدروسة {الجسم C} .

جرد القوى : الجسم C يخضع للقوى التالية : \vec{P}^ وزنه .

\vec{R}^* : تأثير المستوى المائل.

\vec{T} : القوة المطبقة من طرف الخيط.



*بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم C أثناء حركته في معلم (o, \vec{i}, \vec{j}) معلم ومتعامد (انظر الشكل)

(3) $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m_c.\vec{a}_G$ أي : $\Sigma \vec{F} = m_c.\vec{a}$

إسقاط العلاقة (3) على المحور oy : $P \cos \alpha + R = 0$

(4) $T = m_c.g.\sin \alpha - m_c.a$ إسقاط العلاقة (3) على المحور ox : $P \sin \alpha + 0 - T = m_c.a_x$ لأن $a = a_x$ لأن a_y منعدمة ، لا حركة للجسم حسب oy .

بما أن الخيط غير قابل للمد فهو يحتفظ بنفس التوتر في جميع نقطه، وبالتالي : $T = T_O$

ومن خلال العلاقتين (2) و (4) لدينا : $m_c.g.\sin \alpha - m_c.a = \frac{J_{\Delta}.\ddot{\theta}}{r}$

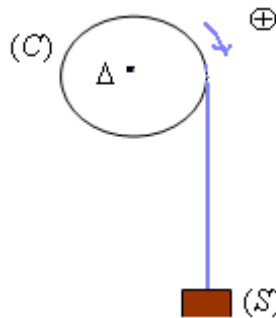
بما أن الخيط لا ينزلق على البكرة : $s = r\theta$ بالاشتقاق $v = r\dot{\theta}$ بالاشتقاق $a = r\ddot{\theta}$

العلاقة السابقة تصبح : $m_c.g.\sin \alpha - m_c.a = \frac{J_{\Delta}.a}{r^2}$ وبالتالي : $m_c.g.\sin \alpha = a(m_c + \frac{J_{\Delta}}{r^2})$

مع : $J_{\Delta} = \frac{1}{2} m_p r^2$ مع $a = \frac{g.\sin \alpha}{1 + \frac{J_{\Delta}}{m_c.r^2}}$ إذن الحركة متغيرة بانتظام.

(2) تطبيق رقم 2:

نعتبر اسطوانة C متجانسة ذات كتلتها $m_c = 2Kg$ ، شعاعها $r = 10cm$ قابلة للدوران حول محور ثابت أفقي Δ يمر من مركزها . نعلق في طرف خيط غير قابل للمد وملفوف حول الأسطوانة جسما صلبا S كتلته $m_s = 1Kg$. نحرر المجموعة بدون سرعة بدنية . عزم المزدوجة المقاومة الناتجة عن الاحتكاك والمطبقة على محور الأسطوانة : $M_c = -0,38 N.m$

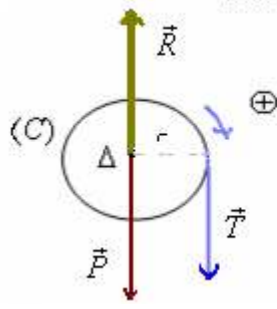


بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة اوجد تعبير T شدة القوة المطبقة من طرف الخيط على البكرة C .

(أ) بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم S اوجد تعبير T' شدة القوة المطبقة من طرف الخيط على S .

(ب) احسب قيمة تسارع الجسم S ثم استنتج التسارع الزاوي للأسطوانة $\ddot{\theta}$.

نعطي : $g = 9,8 m/s^2$



(أ) * المجموعة المدروسة {الأسطوانة C} :
* جرد القوى : الأسطوانة جسم تخضع للقوى التالية :

\vec{P} * وزنها .

\vec{R} * : تأثير محور الدوران .

\vec{T} * : القوة المطبقة من طرف الخيط .

* المزدوجة لمقاومة ذات العزم M_C .

* تطبيق العلاقة الأساسية لتحريك على البكرة :

$$\sum M_{\vec{F}_\Delta} = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$$

$$(a) \quad M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{R}) + M_\Delta(\vec{T}) + M_C = J_\Delta \cdot \ddot{\theta} \quad \text{أي :}$$

بما أن خطي تأثير القوتين \vec{P} و \vec{R} يتقاطعان مع محور الدوران Δ ، فإن عزم كل منهما منعدم .

$$\text{أي : } M_\Delta(\vec{P}) = 0 \text{ و } M_\Delta(\vec{R}) = 0$$

وباعتبار المنحنى الموجب لدوران البكرة ، يكون تعبير عزم القوة \vec{T} بالنسبة لمحور الدوران Δ هو : $M_\Delta(\vec{T}) = +T \cdot r$

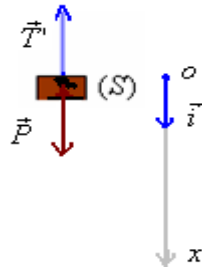
$$0 + 0 + T \cdot r + M_C = J_\Delta \cdot \ddot{\theta} \quad \text{وبذلك تصبح العلاقة (a) :}$$

$$\text{ومنه : } T = \frac{J_\Delta \cdot \ddot{\theta} - M_C}{r}$$

ب-- المجموعة المدروسة {الجسم S} .

جرد القوى : الجسم S يخضع للقوى التالية : \vec{P}_s * وزنه .

* \vec{T}' : القوة المطبقة من طرف الخيط .



$$(b) \quad \vec{P}_s + \vec{T}' = m_s \vec{a}_G \quad \text{أي : } \sum \vec{F} = m_s \cdot \vec{a}_G \quad \text{* تطبيق القانون الثاني لنيوتن على الأسطوانة :}$$

$$\text{* إسقاط العلاقة (b) على المحور } (o, \vec{i}) \quad \text{أي : } T' = P_s - m_s \cdot a \quad \text{ومنه : } T' = P_s - m_s \cdot a$$

$$T' = m_s \cdot g - m_s \cdot a$$

$$\text{أي : } m_s \cdot g - m_s \cdot a = \frac{J_\Delta \cdot \ddot{\theta} - M_C}{r}$$

وبما أن الخيط غير قابل للمد فإن $T' = T$

$$(d) \quad m_s \cdot g - \frac{J_\Delta \cdot \ddot{\theta} - M_C}{r} = m_s \cdot a \quad \text{أي :}$$

$$(d) \quad \text{بما أن الخيط لا ينزلق على البكرة فإن : } J_\Delta = \frac{1}{2} m_c \cdot r^2 \quad \text{ونعلم أن } a = r \ddot{\theta} \quad \text{نعوض في العلاقة}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{m_s \cdot g + \frac{M_C}{r}}{m_s + \frac{m_c}{2}} = \frac{1 \times 9,8 - \frac{0,38}{0,1}}{1 + \frac{2}{2}} = 3 \text{ m/s}^2 \quad m_s \cdot g - \frac{\frac{1}{2} m_c \cdot r^2 \cdot \frac{a}{r} - M_C}{r} = m_s \cdot a$$

$$\text{بما أن : } a = r \ddot{\theta} \quad \text{فإن : } \ddot{\theta} = \frac{a}{r} = \frac{3}{0,1} = 30 \text{ rad/s}^2$$

SBIRO abdelkrim Lycée Agricole Oulad - Taima Agadir Maroc

الله ولي التوفيق .