

تصحيح تمارين حركة دوران جسم صلب حول محور ثابت

تصحيح تمرين 1:

1-1- طبيعة حركة النقطة M :
من خلال المبيان الممثل للسرعة الزاوية ω بدلالة الزمن يتبين أن السرعة الزاوية دالة تآلفية بالنسبة للزمن وبالتالي فحركة النقطة M دائرية متغيرة بانتظام .

1-2- قيمة التسارع الزاوي :
يمثل التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ المعامل الموجه للمنحنى $\omega = f(t)$ نكتب معادلة المنحنى:

$$\omega = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0$$
$$\ddot{\theta} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{4 - 1}{4 - 0} = 0,75 \text{ rad. s}^{-1}$$

السرعة الزاوية عند اللحظة $t = 0$ مبيانيا تساوي:

$$\dot{\theta}_0 = 2 \text{ rad. s}^{-1}$$

- معادلة السرعة الزاوية :

$$2\omega = 0,75t + 2$$

1-2- المعادلة الزمنية لحركة النقطة M :

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \dot{\theta}_0t + \theta_0$$

$$\theta(t) = 0,375t^2 + 2$$

2-2- عدد الدورات المنجزة بين اللحظتين t_1 و t_2 :

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = 2\pi n$$

$$2\pi n = [0,375 \times (5,2)^2 + 2 \times 5,2] - [0,375 \times 4^2 + 2 \times 4] = 6,54 \text{ rad}$$

$$n = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = 1,04$$

2-3- التسارع المماسي والتسارع المنظمي:

$$a_t = r\ddot{\theta}$$

$$a_t = 0,1 \times 0,75 = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ m. s}^{-2}$$

$$a_n = r\dot{\theta}^2$$

$$\dot{\theta} = 0,75 \times 2 + 2 = 3,5 \text{ rad. s}^{-1}$$

$$a_n = 0,1 \times 3,5^2 = 1,225 \text{ m. s}^{-2}$$

منظم متجهة التسارع :

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

$$a = \sqrt{3,5^2 + 1,225^2} = 1,23 \text{ m.s}^{-2}$$

3- مجموع عزم القوى المطبقة على القرص بالنسبة للمحور Δ :

$$\sum M_{\Delta}(\vec{F}) = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

$$\sum M_{\Delta}(\vec{F}) = 6.10^{-2} \times 0,75 = 4,5.10^{-2} \text{ N.m}^{-1}$$

تصحيح تمرين 2:

1- السرعة الزاوية البدئية :

$$\omega_0 = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi N}{60}$$

ت.ع:

$$\omega_0 = \frac{2\pi \times 120}{60} = 12,6 \text{ rad.s}^{-1}$$

2- باعتبار المنحى الموجب للدوران و بما أن شدة القوة ثابتة ، فإن تعبير العزم يكتب :

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = -Fd$$

المسافة بين خط تأثير القوة \vec{F} ومحور الدوران هي: $d = R$

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = -FR$$

الأسطوانة تخضع لوزنها \vec{P} و تأثير محور الدوران \vec{R} و للقوة \vec{F} .
نطبق العلاقة الأساسية للديناميك على الأسطوانة :

$$\sum M_{\Delta}(\vec{F}) = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

$$M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{R}) + M_{\Delta}(\vec{F}) = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

بما أن خط تأثير كل من القوتين \vec{P} و \vec{R} يمر من محور الدوران (Δ) ، فإن :

$$M_{\Delta}(\vec{P}) = M_{\Delta}(\vec{R}) = 0$$

$$0 + 0 - F.R = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{F.R}{J_{\Delta}}$$

3- تعبير السرعة الزاوية :

من خلال تعبير التسارع الزاوي يتبين أن $\ddot{\theta} = \text{cte}$ وبالتالي حركة الأسطوانة دورانية متغيرة (متباطئة) بانتظام.
معادلة السرعة الزاوية تكتب:

$$\omega = \ddot{\theta}t + \omega_0$$

$$\omega = -\frac{F \cdot R}{J_{\Delta}} t + \omega_0$$

4- مدة الكبح:

عندما تتوقف الأسطوانة ، تنعدم سرعتها الزاوية :

$$0 = -\frac{F \cdot R}{J_{\Delta}} t + \omega_0$$

$$\frac{F \cdot R}{J_{\Delta}} t = \omega_0$$

$$t = \frac{J_{\Delta} \cdot \omega_0}{F \cdot R}$$

$$t = \frac{m \cdot R^2 \cdot \omega_0}{2F \cdot R} = \frac{m \cdot R \cdot \omega_0}{2F}$$

ت.ع:

$$t = \frac{100 \times 1.2}{2 \times 50} = 1,2s$$

تصحيح التمرين 3:

1-1- حسب مبيان الشكل (2) فإن المنحنى $\theta = f(t)$ عبارة عن دالة تآلفية معادلتها تكتب:

$$\theta(t) = \alpha t^2 + \beta$$

$$\alpha = \frac{\Delta\theta}{\Delta t^2} = \frac{12-2}{2-0} = 5 \text{ rad. s}^{-2} \text{ و } \beta = 2 \text{ rad}$$

المعادلة الزمنية تكتب:

$$\theta(t) = 5t^2 + 2$$

1-2- طبيعة حركة البكرة:

$$\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \text{ لدينا}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{dt} (5t^2 + 2) \right] = \frac{d}{dt} (10t)$$

$$\ddot{\theta} = 10 \text{ rad. s}^{-2} = \text{cte}$$

نستنتج أن حركة البكرة (P) دورانية متغيرة بانتظام .

1-3- المعادلة الزمنية $\mathbf{z}(t)$:

بما أن الخيط غير قابل للإمتداد ، فإن تسارع G مركز قصور الجسم (S) يكتب:

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}\ddot{\theta} \text{ أي: } \mathbf{a} = 0,1 \times 10 = 1 \text{ m. s}^{-2}$$

حركة G مستقيمة متغيرة بانتظام معادلتها تكتب :

$$\mathbf{z}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{a}t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{z}_0$$

حسب الشروط البدئية : $\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$ و $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ وبالتالي المعادلة الزمنية تكتب :

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{0}, 5t^2$$

2- يخضع الجسم (S) أثناء حركته الى القوى التالية :

\vec{P} وزنه و \vec{T} تأثير الخيط .

نعتبر المعلم (O, \vec{k}) غاليليا و نطبق القانون الثاني لنيوتن :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}_G$$

نسقط العلاقة على المحور Oz :

$$mg - T = ma$$

$$T = m(a + g)$$

ت.ع:

$$T = 0,2 \times (10 - 1) = 1,8 \text{ N}$$

3- تخضع البكرة أثناء دورانها الى التأثيرات التالية :

\vec{P}' : وزنها .

\vec{T}' : تأثير الخيط .

\vec{R} : تأثير محور الدوران .

تأثير مزدوجة الإحتكاك عزمها M .

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك :

$$M_{\Delta}(\vec{P}') + M_{\Delta}(\vec{T}') + M_{\Delta}(\vec{R}) + M = J_{\Delta} \ddot{\theta} \quad (1)$$

باعتبار المنحى الموجب للدوران :

$M_{\Delta}(\vec{P}') = M_{\Delta}(\vec{R}) = 0$ لأن خط تأثير كل من القوتين \vec{R} و \vec{P}' يمر من محور الدوران (Δ) .

$$M_{\Delta}(\vec{T}') = T'r$$

العلاقة (1) تكتب:

$$0 + 0 + T'r + M = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

كتلة الخيط مهملة إذن : $T = T'$

$$M = J_{\Delta} \ddot{\theta} + Tr$$

ت.ع:

$$M = 10^{-2} \times 10 - 1,8 \times 0,1 = -8.10^{-2} \text{ N.m}$$

4- عدد الدورات المنجزة بين لحظة تقطع الخيط ولحظة توقف البكرة:

عندما يتقطع الخيط تصبح البكرة خاضعة لجميع التأثيرات السابقة باستثناء توتر الخيط. العلاقة الأساسية للديناميك تكتب :

$$M_{\Delta}(\vec{P}') + M_{\Delta}(\vec{R}) + M = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{M}{J_{\Delta}} = \frac{-8.10^{-2}}{10^{-2}} = -8 \text{ rad.s}^{-2}$$

للبكرة حركة دورانية متغيرة بانتظام ، معادلتها الزمنية تكتب:

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0$$

عند اللحظة t_1 يتقطع الخيط فتكون السرعة الزاوية للبكرة هي : $\dot{\theta}_0$

$$\theta(t) = 5t^2 + 2 \quad \text{حسب السؤال الاول :}$$

$$\dot{\theta}(t) = 10t$$

عند اللحظة $t_1=2s$ تكون السرعة الزاوية للبكرة :

$$\dot{\theta}(t_1) = 10 \times 2 = 20 \text{ rad.s}^{-1}$$

وتمثل السرعة الزاوية البدئية للمرحلة الثانية .

حساب t_2 :

عند اللحظة t_2 تتوقف البكرة فتكون سرعتها منعدمة أي: $\dot{\theta}(t_2) = 0$

تكتب معادلة السرعة في المرحلة الأخيرة :

$$\dot{\theta}(t) = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0 = -8t + 20$$

$$\text{بما أن : } \dot{\theta}(t_2) = 0 \text{ أي : } 0 = -8t_2 + 20$$

$$t_2 = \frac{20}{8} = 2,5s$$

نعلم أن:

$$\Delta\theta = \theta(t_2) - \theta_0 = 2\pi n$$

$$-\frac{1}{2} \times 8t_2^2 + 20t_2 = 2\pi n$$

$$n = \frac{-4 \times 2,5^2 + 20 \times 2,5}{2\pi} = 3,98 \approx 4$$

5- بعد تقطع الخيط يصبح الجسم (S) في سقوط حر، حيث يخضع للوزن فقط بعد إهمال تأثير الهواء.
القانون الثاني لنيوتن يكتب :

$$\vec{P} = m\vec{a}$$

الإسقاط على المحور Oz :

$$ma = mg \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{g} = \mathbf{cte}$$

الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام :

$$z = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + z_0$$

السرعة البدئية للمرحلة الثانية تساوي السرعة عند اللحظة t_1 للمرحلة الأولى:

$$v(t_2) = r\dot{\theta}(t_1) = 0,1 \times 20 = 2m.s^{-1}$$

الأنسوب البدئي z_0 يمثل المسافة التي قطعها الجسم خلال المرحلة الأولى خلال المدة t_1 :

$$z(t_1) = 0,5t_1^2 = 0,5 \times 2^2 = 1m$$

المعادلة الزمنية للجسم (S) بعد اللحظة t_1 :

$$z(t) = 5t^2 + 2t + 1$$

تصحيح التمرين 4 :

1- معادلة السرعة الزاوية $\dot{\theta} = f(t)$:
 المنحنى الممثل للدالة $\dot{\theta} = f(t)$ عبارة عن دالة خطية معادلتها تكتب : $\dot{\theta} = \alpha t$

$$\alpha = \frac{\Delta \dot{\theta}}{\Delta t} = \frac{10 - 0}{0,25 - 0} = 40 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\dot{\theta}(t) = 40t$$

2- طبيعة حركة (B):
 التسارع الزاوي للبكرة يكتب:

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = 40 \text{ rad.s}^{-2} = \text{cte}$$

حركة البكرة دورانية متغيرة بانتظام .

3- تعبير n عدد دورات البكرة عند اللحظة t :

المعادلة الزمنية للحركة الدوانية المتغيرة بانتظام تكتب:

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \ddot{\theta} t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0$$

لدينا : $\dot{\theta}_0 = \theta_0 = 0$

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \times 40t^2 = 20t^2$$

عدد الدورات المنجزة خلال المدة t :

$$\theta(t) = 2\pi n$$

$$n = \frac{\theta(t)}{2\pi} = \frac{20t^2}{2\pi}$$

ت.ع:

$$n = \frac{20 \times (1,25)^2}{2\pi} = 4,97 \simeq 5$$

4- طبيعة حركة كل من (S₁) و (S₂):

بنا أن الخيط لا ينزلق على مجرى البكرة وغير مدود ، إذا كانت المسافة التي ينتقل بها الجسم (S₁) على (O, \vec{i}) هي x فإن المسافة التي ينتقل بها الجسم (S₂) على (O, \vec{j}) هي y والقوس الذي يدور به نقطة من مجرى البكرة هو s حيث: $s = x = y = r\theta$

$$\ddot{x} = \ddot{y} = r\ddot{\theta}$$

للجسمين (S₁) و (S₂) نفس التسارع : $a_1 = a_2 = r\ddot{\theta} = 0,04 \times 40 = 1,6 \text{ m.s}^{-2}$
 نستنتج أن حركة كل من (S₁) و (S₂) مستقيمة متغيرة بانتظام .

5- إثبات العلاقة: $a = \frac{(m_2 - m_1 \cdot k)g}{m_1 + m_2 + \frac{J_A}{r^2}}$

نطبق القانون الثاني لنيوتن على (S₁) :

$$\vec{P}_1 + \vec{T}_1 + \vec{R}_1 = m_1 \vec{a}$$

الإسقاط على (O, \vec{i}) :

$$-f + T_1 = m_1 a$$

الإسقاط على (O, \vec{j}) :

$$R_N - m_1 g = 0 \Rightarrow R_N = m_1 g$$

معامل الاحتكاك يكتب:

$$k = \tan \alpha = \frac{f}{R_N} \Rightarrow f = k \cdot R_N = m_1 g k$$

العلاقة (1) تكتب:

$$T_1 = k m_1 g + m_1 a$$

نطبق القانون الثاني لنيوتن على (S_2) :

$$\vec{T}_2 + \vec{P}_2 = m_2 a$$

الإسقاط على (O, \vec{j}) :

$$T_2 - P_2 = m_2 a$$

$$T_2 = m_2 a - m_2 g$$

نطبق العلاقة الأساسية للديناميك للدوران على البكرة (B):

$$M_{\Delta}(\vec{T}_1) + M_{\Delta}(\vec{T}_2) + M_{\Delta}(\vec{P}) + M_{\Delta}(\vec{R}) = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

باعتبار المنحنى الموجب للدوران نكتب:

$$-T_1 r + T_2 r = J_{\Delta} \ddot{\theta}$$

لدينا: $\ddot{\theta} = \frac{a}{r}$

$$T_2 - T_1 = \frac{a \cdot J_{\Delta}}{r^2}$$

نعوض T_2 و T_1 بتعبيرهما:

$$m_2 a - m_2 g - (k m_1 g + m_1 a) = \frac{a \cdot J_{\Delta}}{r^2}$$

$$a \left(m_1 + m_2 + \frac{J_{\Delta}}{r^2} \right) = g(m_2 - k m_1)$$

نستنتج العلاقة:

$$a = \frac{(m_2 - m_1 \cdot k) g}{m_1 + m_2 + \frac{J_{\Delta}}{r^2}}$$

لكي تتم حركة (S_1) يجب أن يكون التسارع موجبا أي:

$$a = \frac{(m_2 - m_1 \cdot k) g}{m_1 + m_2 + \frac{J_{\Delta}}{r^2}} > 0$$

$$m_2 - m_1 \cdot k > 0$$

$$m_2 > m_1 \cdot k$$

$$m_2 > 0,16 \text{ kg}$$