

سلسلة 1	الحساب المثلثي حل مقترح	السنة 1 بكالوريا علوم رياضية
تمرين 1 :		
	$0 < r < \frac{f}{2}$ ، $\cos r = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$	
أ)	$\cos 2r = 2\cos^2(r) - 1 = 2 \cdot \frac{8 + 2\sqrt{12}}{16} - 1 = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{8} - 1 = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ لدينا:	1
ب)	لدينا $0 < r < \frac{f}{2}$ إذن $0 < 2r < f$ ، وبما أن $\cos 2r = \frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن $2r = \frac{f}{6}$ منه: $r = \frac{f}{12}$	
$0 < s < \frac{f}{2}$ ، $\tan s = 2 + \sqrt{3}$		
أ)	$\tan 2s = \frac{2 \tan s}{1 - \tan^2 s} = \frac{2(2 + \sqrt{3})}{1 - (7 + 4\sqrt{3})} = \frac{2(2 + \sqrt{3})}{-6 - 4\sqrt{3}} = \frac{-(2 + \sqrt{3})}{3 + 2\sqrt{3}} = \frac{-(2 + \sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 2)} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ لدينا:	2
ب)	لدينا $0 < s < \frac{f}{2}$ منه: $0 < 2s < f$ وبما أن $\tan 2s = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ فإن $2s = \frac{5f}{6}$ بالتالي: $s = \frac{5f}{12}$	
<p>من الضروري حفظ النسب المثلثية للزوايا الخاصة: $\frac{f}{3}$ و $\frac{f}{6}$ و $\frac{f}{4}$ وبقيّة النسب يمكنك استخراجها مستعملا الدائرة المثلثية</p> <p>أو خاصيات الحساب المثلثي. فمثلا $-\frac{\sqrt{3}}{3} = -\tan\left(\frac{f}{6}\right) = \tan\left(-\frac{f}{6}\right) = \tan\left(f - \frac{f}{6}\right) = \tan\left(\frac{5f}{6}\right)$</p>		
تمرين 2 : $0 < r < \frac{f}{2}$ ، $\cos r = \frac{3}{5}$		
نعلم أن: $\sin^2 r + \cos^2 r = 1$ منه: $\sin^2 r + \frac{9}{25} = 1$ منه: $\sin^2 r = \frac{16}{25}$		
وبما أن: $0 < r < \frac{f}{2}$ فإن $\sin r > 0$ منه: $\sin r = \frac{4}{5}$ بالتالي: $\sin 2r = 2 \sin r \cos r = 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$		
$\cos 3r = \cos(2r + r) = \cos 2r \cdot \cos r - \sin 2r \cdot \sin r = (2\cos^2 r - 1)\cos r - \sin 2r \cdot \sin r$		
لدينا: $\cos 3r = \left(\frac{18}{25} - 1\right) \times \frac{3}{5} - \frac{24}{25} \times \frac{4}{5} = \frac{-7}{25} \times \frac{3}{5} - \frac{96}{125} = \frac{-117}{125}$		
لا يجب نسيان تطبيق الخاصية الأساسية للحساب المثلثي $\sin^2(r) + \cos^2(r) = 1$ كلما دعت الحاجة لذلك.		
تمرين 3 :		
1	لدينا: $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 = \left(\sin \frac{x}{2}\right)^2 + \left(\cos \frac{x}{2}\right)^2 + 2\left(\sin \frac{x}{2}\right)\left(\cos \frac{x}{2}\right) = 1 + \sin\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = 1 + \sin x$	
2	لدينا: $x \neq \frac{f}{2} + kf / k \in Z \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$	
3	لدينا: $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^4 x = \cos 2x + \sin^4 x$ بالتالي: $\cos^4 x - \sin^4 x = 1 \times (\cos x \cos x - \sin x \sin x)$	
4	لدينا: $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(x + x) = \cos(2x)$	
$A = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 + 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x$ $A = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x) + 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x$ $A = \sin^4 x + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1$		
تمرين 4 : $(x, y) \in \left[0, \frac{f}{2}\right]^2$ ، $\begin{cases} \sin x + \cos y = \sqrt{2} \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1 \end{cases}$		

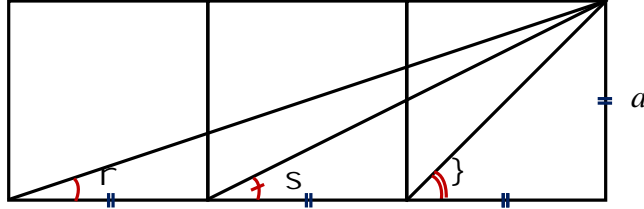
$$\left(\cos y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \cos^2 y - \sqrt{2} \cos y + \frac{1}{2} + \cos^2 x - \sqrt{2} \cos x + \frac{1}{2}$$

1 لدينا :

$$\left(\cos y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \cos^2 y + \cos^2 x - \sqrt{2}(\cos y + \cos x) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

2 من السؤال السابق نستنتج أن: $\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، و بما أن $(x, y) \in \left[0, \frac{f}{2}\right]^2$ فإن $x = y = \frac{f}{4}$

تمرين 5 :



1 لدينا: $\tan r = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$ و $\tan r = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$

$$\tan(r+s) = \frac{\tan r + \tan s}{1 - \tan r \tan s} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1 \quad \text{و} \quad \tan \} = \frac{a}{a} = 1$$

منه: $\tan(r+s) = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan s = \frac{1}{3} < 1 = \tan\left(\frac{f}{4}\right) \\ 0 < s < \frac{f}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow 0 < s < \frac{f}{4} \quad \text{و} \quad \left\{ \begin{array}{l} \tan r = \frac{1}{2} < 1 = \tan\left(\frac{f}{4}\right) \\ 0 < r < \frac{f}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow 0 < r < \frac{f}{4}$$

منه: $0 < r+s < \frac{f}{2}$

$$\boxed{r+s=\}} \text{ بالتالي: } \left\{ \begin{array}{l} 0 < r+s < \frac{f}{2} \\ \tan(r+s) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow r+s = \frac{f}{4} \quad \text{و} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < r+s < \frac{f}{2} \\ \tan(r+s) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow r+s = \frac{f}{4}$$

فكرة التمرين واضحة: للبرهان على تساوي زاويتين نبرهن على تساوي إحدى النسب المثلثية (في المثال الظل) مع إمكانية تطبيق قواعد الجمع و الطرح، لكن يجب الانتباه أن الاستنتاج لا يكون كاملاً إلا إذا برهننا أن الزاويتين تنتميان معاً لمجال من الشكل $\left[-\frac{f}{2} + kf; \frac{f}{2} + kf\right]$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ لأن العبارة: $\tan x = \tan y \Rightarrow x = y$ لا تكون صحيحة إلا مع الشرط السابق.