Arithmétique dans Z
الحسابيات في Z

I . القسمة الأقليدية / قابلية القسمة / الموافقة : ammarimaths

الموافقة بترديد n:	قابلة القسمة:	خاصية القسمة الأقليدية:
نعتبر عددا طبيعيا عير منعدم n . a و b عددان صحيحان نسبيان؛ نقول أن العدد a موافق للعدد b بترديد n ، إذا وجد عدد صحيح k بحيث: $a-b=k.n$ نكتب : a≡b[modulo]	a و b عددان صحيحان؛ نقول أن b يقسم a (أو a مضاعف ل b)؛ إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح q بحيث: $a=b.q$	مهما يكن العدد الصحيح النسبي a ، ومهما يكن العدد الصحيح الطبيعي غير المنعدم، b ، يوجد عددان صحيحان وحيدان q و r ، بحيث : $a=b.q+r$ و $0\le r \prec b$

II . خاصيات قابلية القسمة و الموافقة : ammarimaths-bm

قابيلة القسمة:

$$a/a$$
$$(a/b \;\; et \;\; c/d) \Rightarrow ac/bd$$
$$(a/b \;\; et \;\; b/c) \Rightarrow a/c$$
$$(a/b \;\; et \;\; b/a) \Rightarrow |a|=|b|$$
$$(\delta/a \;\; et \;\; \delta/b) \Rightarrow (\forall(\alpha,\beta)\in Z^2) \; ; \; \delta/\alpha.a+\beta.b$$
$$a^n/b \Rightarrow a/b$$

الموافقة:

$$a\equiv b[n] \Leftrightarrow a-b=k.n \Leftrightarrow n/a-b$$
$$\begin{cases} a\equiv b[n] \\ c\equiv d[n] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c\equiv b+d[n] \\ a.c\equiv b.d[n] \end{cases}$$

III . القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر : ammarimaths-bm

القاسم المشترك الأكبر:

نرمز له : $d = pgdc(a,b)=a\wedge b$

يحقق القاسم المشترك الأكبر، الخاصيات التالية:

$$(d=a\wedge b) \Leftrightarrow (\exists(a',b')\in Z^2) \; ; \; \begin{cases} a=d.a' \\ b=d.b' \end{cases} \; et \; a'\wedge b'=1$$

$$\begin{cases} d'/a \\ d'/b \end{cases} \Rightarrow d'/a\wedge b$$

المضاعف المشترك الأصغر:

يحقق المضاعف المشترك الأصغر، الخاصيات التالية:

$$(m=a\vee b) \Rightarrow \begin{cases} a/m \\ b/m \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} a/c \\ b/c \end{cases} \Rightarrow a\wedge b/c$$

خاصية مشتركة:

$$\forall(a,b)\in Z^2 ; (a\vee b).(a\wedge b)=|a.b|$$

IV . الأعداد الأولية فيما بينها / خاصيات ammarimaths-bm:

الأعداد الأولية فيما بينها:	خاصيات أخرى:

Citation : « La mathématique est la rêne de la science et l'Arithmétique est la rêne des mathématique »

Arithmétique dans Z
الحسابيات في Z

نقول أن العددين a b أوليان فيما بينهما إذا وفقط إذاكان: pgcd (a,b)=1. ***مبرهنة كوص:*** $(c/a.b \text{ et } c\wedge a=1) \Rightarrow (c/b)$	$(a/c \text{ et } b/c \text{ et } a\wedge b=1) \Rightarrow (a.b/c)$ $(a\wedge b=1 \text{ et } a\wedge c=1) \Rightarrow (a\wedge b.c)=1$ $(a\wedge b=1) \Leftrightarrow \forall(m,n)\in IN^*xIN^* ;\ (a^m\wedge b^n=1)$ $(a=b.q+r \text{ et } 0\le r\prec b) \Rightarrow (a\wedge b=r\wedge b)$
V. الأعداد الأولية / خاصيات :	**ammarimaths-bm**
يكون عدد صحيح، عددا أوليا إذا وفقط إذا كان يقبل قاسمين موجبين بالضبط 2، 3 ، 5، 7 ...العددان 1 و 1- ليسا أوليان. ***مجموعة الأعداد الأولية مجموعة غير منتهية...***	***خاصيات:*** ***ليكن p عددا أوليا، لدينا:*** $(p/a.b) \Rightarrow (p/a \text{ ou } p/b)$ $(p/a^n) \Rightarrow (p/a)$ $(p/a_1.a_2...a_n) \Leftrightarrow \exists i\in(1,2,...,n) ;\ (p/a_i)$ $(p/a)\Rightarrow p\wedge a=p \text{ et } (p \text{ ne divise pas } a)\Rightarrow p\wedge a=1$

I. خوارزمية أقليدس :	ammarimaths-bm
نعتبر العددين الصحيحين الطبيعيين a و b ، بحيث: $a>b$ نقسم العدد a (العدد الأكبر) على العدد b ونجد: $(1):\quad a=b.q_0+r_0 \quad \text{et} \quad 0\le r_0\prec b$ إذا كان $r_0=0$ ، فإن $pgcg(a,b)=b$ إذا كان $r_0 \# 0$ ، نقسم b على r_0 ، ونجد: $(2):\quad b=r_0.q_1+r_1 \quad \text{et} \quad 0\le r_1\prec r_0\prec b$ إذا كان $r_1=0$ ، فإن $pgcd(a,b)=pgcd(b,r_0)=r_0$	إذا كان $r_1 \# 0$ ، نقسم r_0 على r_1 ، ونجد: الخ. بعد عدد محدود من العمليات نحصل على باقي منعدم (ذلك لأن متتالية البواقي هي متتالية تناقصية لأعداد صحيحة) ليكن r_n آخر باقي غير منعدم ، يكون لدينا إذن: $pgcd(a,b)=pgcd(b,r_0)=\ldots=pgcd(r_{n-1},r_n)=r_n$
II. تفكيك عدد صحيح الى جداء عوامل أولية :	ammarimaths-bm
كل عدد صحيح طبيعي غير منعدم ومخالف للعدد1 ، يتفكك بشكل وحيد على شكل: $n=p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n}$	بحيث تكون الأعداد *pi* أولية، والأعداد α_i صحيحة غير منعدمة.
III. مجموعة أصناف التكافؤ : Z/n.Z	ammarimaths-bm
علاقة التوافق: $a\equiv b[n] \Leftrightarrow a-b=k.n \Leftrightarrow n/a-b$ هي علاقة تكافؤ في مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية، منسجمة مع قانوني الجمع و الضرب: $\begin{cases} a\equiv b[n] \\ c\equiv d[n] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c\equiv b+d[n] \\ a.c\equiv b.d[n] \end{cases}$ صنف تكافؤ العدد الصحيح النسبي x ، هو المجموعة المعرفة كما يلي: $\alpha=\bar{x}=\{y\in Z/\ \ y\equiv x[\text{modulo } n]\}$	يرمز لمجموعة أصناف التكافؤ : $Z/n.Z$ $Z/n.Z=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},......,\overline{n-2},\overline{n-1}\}$ *يعرف الجمع والضرب في هذه المجموعة كما يلي:* $\begin{cases} \bar{a}+\bar{b}\equiv\overline{a+b} \\ \bar{a}.\bar{b}\equiv\overline{a.b} \end{cases}$ *(Z/n.Z , + , x) حلقة واحدية تبادلية، بصفة عامة غير تكاملية.* *إذا كان العدد n أوليا، فإن (Z/n.Z , + , x) يكون جسما.* $(\bar{a} \text{ inversible dans } Z/n.Z) \Leftrightarrow (a\wedge n=1)$
IV. نظمات العد : Z/n.Z	ammarimaths-bm
ليكن x عددا صحيحا أكبر من أو يساوي 2. كل عدد صحيح b يمكن أن يكتب على الشكل : $b=a_n.x^n+a_{n-1}.x^{n-1}+....+a_1.x+a_0$	نكتب: $(1):\quad b=\overline{a_na_{n-1}....a_1a_0}^{\ (x)}$ ونقول أن هذه الكتابة هي الكتابة المختصرة للعدد b في

*Citation : « **La mathématique est la rêne de la science et l'Arithmétique est la rêne des mathématique** »*

Arithmétique dans Z
الحسابيات في Z

بحيث: $a_n \neq 0$ et $(\forall i \in [0, n])$; $a_i \in [0, n-1]$	نظمة العد الذي أساسه x .
V . تحديد القاسم المشترك الأكبر والمصاعف المشترك الأصغر لعددين :	ammarimaths-bm
نعتبر : $a = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$ et $b = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\beta_i}$ التفكيك الى جداء عوامل أولية للعددينم a و b . نجد:	$a \wedge b = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\inf(\alpha_i, \beta_{iç})}$ $a \vee b = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\sup(\alpha_i, \beta_{iç})}$