

تمارين و حلول

- تمرين 1** ليكن n عددا صحيحا طبيعيا
 1- بين أن 8 يقسم $n^2 - 1$ لكل عدد صحيح طبيعي فردي n
 2- بين لكل n من العدد \mathbb{N} ان $n^3 - n$ يقبل القسمة على 3

- تمرين 2**
 ليكن a و b عددين مختلفين من $\mathbb{N}^* - \{1\}$ و $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$
 بين أن إذا كان $a^n - b^n$ عددا أوليا فان n عدد أولي

- تمرين 3**
 ليكن $n \in \mathbb{N}$. نعتبر المعادلة $(x-2n)(y-2n) = 2n^2$ $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$
 ليكن $\delta = (x-2n) \wedge (y-2n)$
 1- بين أن $\delta^2 / 2n^2$ و $\delta / (x \wedge y)$
 2- بين أن $x^2 + y^2 = (x+y-2n)^2$ و استنتج أن $(x \wedge y) / \delta$
 3- بين أن $(x \wedge y) / n$

- تمرين 4**
 ليكن $(a; b) \in \mathbb{N}^2$ حيث $(a+b) \wedge ab = p^2$ و p عدد صحيح طبيعي أولي
 أ- بين أن p^2 / a^2 و استنتج أن p/a و p/b
 ب- بين أن $a \wedge b = p$ أو $a \wedge b = p^2$

- تمرين 5**
 لكل عدد صحيح طبيعي n نعتبر الأعداد $a_n = 4 \times 10^n - 1$ و $b_n = 2 \times 10^n - 1$
 و $c_n = 2 \times 10^n + 1$
 أ/ أحسب $b_1, c_1, a_1, b_2, c_2, a_2, b_3, c_3$.
 ب/ بين أن a_n و c_n قابلان للقسمة على 3
 ج/ بين أن b_3 عدد أولي
 د/ بين أن لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n : $a_{2n} = b_n \times c_n$ استنتج التفكيك إلى
 جداء عوامل أولية للعدد a_6
 ه/ بين أن $\text{PGCD}(b_n; c_n) = \text{PGCD}(b_n; 2)$

حلول

حل تمرين 1

- 1- ليكن n عدد صحيح طبيعي فردي أي يوجد k من \mathbb{N} حيث $n = 2k + 1$
 لدينا $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ ومنه $n^2 - 1 = 4k(k+1)$
 وحيث أن $k(k+1)$ عدد زوجي (لأنه جداء عددين متتاليين)
 فانه يوجد k' من \mathbb{N} حيث $k(k+1) = 2k'$ و بالتالي $n^2 - 1 = 8k'$
 إذن 8 يقسم $n^2 - 1$
 2- لدينا $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$
 ليكن n من \mathbb{N} و منه يوجد $k \in \mathbb{N}$ حيث $n = 3k$ أو $n = 3k + 1$ أو $n = 3k + 2$
 و بالتالي $n^3 - n = 3k(3k-1)(3k+1)$ أو $n^3 - n = (3k+1)(3k)(3k+2)$

$$n^3 - n = (3k+2)(3k+1)(3k+3) = 3(3k+2)(3k+1)(k+1) \text{ أو}$$

و في جميع هذه الحالات $n^3 - n = 3k'$ حيث $k' \in \mathbb{N}$

اذن $n^3 - n$ يقبل القسمة على 3

حل تمرين 2

ليكن a و b عددين مختلفين من $\mathbb{N}^* - \{1\}$ و $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

نبين أن إذا كان $a^n - b^n$ عددا أوليا فان n عدد أولي

لنبين أن n عدد غير أولي تستلزم $a^n - b^n$ عدد غير أولي (الاستلزام المضاد للعكس)

$\exists (p; q) \in (\mathbb{N}^* - \{1\})^2 / n = pq$ ومنه n عدد غير أولي

$$a^{pq} - b^{pq} = (a^p)^q - (b^p)^q = (a^p - b^p) \left(\sum_{k=0}^{q-1} (a^p)^k (b^p)^{q-1-k} \right) \text{ ومنه}$$

بما أن a و b عددين مختلفين من $\mathbb{N}^* - \{1\}$ و $(p; q) \in (\mathbb{N}^* - \{1\})^2$ فان $|a^p - b^p| \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

$$\sum_{k=0}^{q-1} (a^p)^k (b^p)^{q-1-k} > 1 \text{ و}$$

اذن $a^n - b^n$ عدد غير أولي

و منه إذا كان $a^n - b^n$ عددا أوليا فان n عدد أولي

حل تمرين 3

ليكن $n \in \mathbb{N}$. نعتبر المعادلة $(x-2n)(y-2n) = 2n^2$ $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$

ليكن $\delta = (x-2n) \wedge (y-2n)$

1- نبين أن $\delta^2 / 2n^2$

* لدينا $\delta = (x-2n) \wedge (y-2n)$ ومنه $\delta / (x-2n)$ و $\delta / (y-2n)$

وبالتالي $\delta^2 / (x-2n)(y-2n)$ إذن $\delta^2 / 2n^2$

نبين أن $\delta / (x \wedge y)$

لدينا $\delta^2 / 2n^2$ و منه $\delta / 2n$

و حيث $\delta / (x-2n)$ و $\delta / (y-2n)$ فان δ / x و δ / y إذن $\delta / (x \wedge y)$

2- نبين أن $x^2 + y^2 = (x+y-2n)^2$

$$(x+y-2n)^2 = x^2 + y^2 + 2xy - 4nx - 4ny + 4n^2$$

$$= x^2 + y^2 + 2(xy - 2nx - 2ny + 2n^2)$$

$$= x^2 + y^2 + 2((x-2n)(y-2n) - 2n^2)$$

$$= x^2 + y^2 \quad \text{car} \quad (x-2n)(y-2n) - 2n^2 = 0$$

نستنتج أن $(x \wedge y) / \delta$

لدينا $(x \wedge y)^2 / x^2$ و $(x \wedge y)^2 / y^2$ ومنه $(x \wedge y)^2 / (x^2 + y^2)$

و بالتالي $(x \wedge y)^2 / (x+y-2n)^2$ ومنه $(x \wedge y) / (x+y-2n)$

و حيث $(x \wedge y) / x$ و $(x \wedge y) / y$ فان $(x \wedge y) / (x-2n)$ و $(x \wedge y) / (y-2n)$

إذن $(x \wedge y) / [(x-2n) \wedge (y-2n)]$ أي $(x \wedge y) / \delta$

3- نبين أن $(x \wedge y)/n$

لدينا $\delta/2n$ ومنه $2n = k\delta$ $\exists k \in \mathbb{Z}$ وبالتالي $4n^2 = k^2\delta^2$
 لدينا $\delta^2/2n^2$ ومنه $2n^2 = k'\delta^2$ $\exists k' \in \mathbb{Z}$ أي $4n^2 = 2k'\delta^2$
 ومنه $k^2 = 2k'$ ومنه k زوجي أي $k = 2m$ $\exists m \in \mathbb{Z}$
 وحيث $2n = k\delta$ فإن $2n = 2m\delta$ أي $n = m\delta$ إذن δ/n
 وبما أن $(x \wedge y)/\delta$ فإن $(x \wedge y)/n$

حل تمرين 4

ليكن $(a; b) \in \mathbb{N}^2$ حيث $(a+b) \wedge ab = p^2$ و p عدد صحيح طبيعي أولي

أ- نبين أن p^2/a^2 و نستنتج أن p/a و p/b
 $(a+b) \wedge ab = p^2$ ومنه p^2/ab و $p^2/a+b$
 وبالتالي $p^2/ab+b^2$ و p^2/a^2+ab و p^2/a^2 و p^2/b^2
 ومنه p/a و p/b

ب- بين أن $a \wedge b = p^2$ أو $a \wedge b = p$

ليكن $a \wedge b = d$ ومنه d/a و d/b

وبالتالي d/ab و $d/a+b$ إذن $d/(a+b) \wedge ab$ أي d/p^2

ومنه $d \in \{1; p; p^2\}$

لنفرض أن $d = 1$

$d = 1 \Rightarrow a \wedge b = 1 \Rightarrow (a+b) \wedge ab = 1 \Rightarrow p = 1$ وهذا غير صحيح لأن p أولي

إذن $d = p$ أو $d = p^2$

حل تمرين 5

$c_n = 2 \times 10^n + 1$ و $b_n = 2 \times 10^n - 1$ و $a_n = 4 \times 10^n - 1$

أ/ نحسب $b_1, c_1, a_1, b_2, c_2, a_2, b_3, c_3, a_3$

$c_1 = 2 \times 10^1 + 1 = 21$ $b_1 = 2 \times 10^1 - 1 = 19$ $a_1 = 4 \times 10^1 - 1 = 39$
 $c_2 = 2 \times 10^2 + 1 = 201$ $b_2 = 2 \times 10^2 - 1 = 199$ $a_2 = 4 \times 10^2 - 1 = 399$
 $c_3 = 2 \times 10^3 + 1 = 2001$ $b_3 = 2 \times 10^3 - 1 = 1999$ $a_3 = 4 \times 10^3 - 1 = 3999$

ب/ نبين أن a_n و c_n قابلان للقسمة على 3

لدينا $10 \equiv 1 [3]$ ومنه $10^n \equiv 1 [3]$ وحيث أن $4 \equiv 1 [3]$ فإن $4 \times 10^n \equiv 1 [3]$

ومنه $4 \times 10^n - 1 \equiv 0 [3]$ أي $a_n \equiv 0 [3]$

لدينا $10^n \equiv 1 [3]$ ومنه $2 \times 10^n \equiv 2 [3]$ أي $2 \times 10^n \equiv -1 [3]$

ومنه $2 \times 10^n + 1 \equiv 0 [3]$ إذن $c_n \equiv 0 [3]$

إذن a_n و c_n يقبلان القسمة على 3

ج/ نبين أن b_3 عدد أولي

لدينا $b_3 = 1999$ و 1999 لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية التي أصغر أو تساوي 47

و $47^2 = 2209 > 1999$

إذن b_3 عدد أولي

د/ نبين أن لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n : $b_n \times c_n = a_{2n}$

ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$b_n \times c_n = (2 \times 10^n - 1)(2 \times 10^n + 1) = (2 \times 10^n)^2 - 1^2 = 4 \times 10^{2n} - 1 = a_{2n}$$

نستنتج التفكيك إلى جداء عوامل أولية للعدد a_6

$$2001 = 3 \times 23 \times 29 \quad \text{و} \quad a_6 = b_3 \times c_3 = 1999 \times 2001$$

$$a_6 = 3 \times 23 \times 29 \times 1999$$

هـ/ نبين أن $\text{PGCD}(b_n ; c_n) = \text{PGCD}(b_n ; 2)$

$$c_n = 2 \times 10^n + 1 = 2 \times 10^n - 1 + 2 = b_n + 2$$

إذا كان d قاسم مشترك للعددين b_n و c_n فإن d قاسم للعدد 2 لان $c_n - b_n = 2$

إذا كان d قاسم مشترك للعددين b_n و 2 فإنه قاسم للعدد c_n لان $c_n = b_n + 2$

ومنه مجموعة القواسم المشتركة للعددين b_n و c_n هي مجموعة قواسم العددين b_n و 2

$$\text{إذن} \quad \text{PGCD}(b_n ; c_n) = \text{PGCD}(b_n ; 2)$$