سلسلة 1	الحسابيـــــــــات حلول مقترحة	السنة 1 بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1 :

1 ليكن $n\in IN$ ، لدينا: $5\equiv 1[4]$ منه $5^n\equiv 1^n[4]$ أي : $5^n\equiv 1[4]$ منه : $5^n-1\equiv 0[4]$

مما يعني أن : $4/5^n-1$ ، بالتالي : $\boxed{\forall n\in IN \quad 4/5^n-1}$

2 ليكن $n\in IN$ ، لدينا: $9\equiv 2[7]$ منه $9^n\equiv 2^n[7]$ أي : $9^n-2^n\equiv 0[7]$

مما يعني أن : $7/9^n-2^n$ ، بالتالي : $\boxed{\forall n\in IN \quad 7/9^n-2^n}$

3 لنبرهن بالترجع أن : $\forall n\in IN \quad 9/2^{2n}+15n-1$

بالنسبة لـ $n=0$ لدينا : $2^{2n}+15n-1=2^0+0-1=0$ إذن العبارة صحيحة بالنسبة لـ $n=0$

نفترض أن : $9/2^{2n}+15n-1$ و نبين أن : $9/2^{2(n+1)}+15(n+1)-1$

لدينا : $9/2^{2n}+15n-1$ منه : $2^{2n}+15n-1=9k \ / k\in Z$ منه : $2^{2n}=9k-15n+1$

منه :

$$2^{2(n+1)}+15(n+1)-1=2^{2n+2}+15n+15-1=2^{2n}\times 2^2+15n+14=(9k-15n+1)\times 4+15n+14$$

$$2^{2(n+1)}+15(n+1)-1=36k-60n+4+15n+14=36k-45n+18=9(4k-5n+2)$$

و بما أن : $(4k-5n+2)\in Z$ فإن : $9/2^{2(n+1)}+15(n+1)-1$

بالتالي : $\boxed{\forall n\in IN \quad 9/2^{2n}+15n-1}$

4 ليكن r خارج قسمة n على 2 إذن : $n=2p+r \ / r\in\{0;1\}$ منه : $r(r-1)=0$ منه : $r^2=r$

منه: $n^2-n=4p^2+4pr+r^2-2p-r=4p^2+4pr-2p=2(2p^2+2pr-p)$ بالتالي : $2/n^2-n$

هناك طرق متعددة لحل هذا السؤال الذي يعتبر خاصية تم تعلمها في السنة السابقة، لكننا آثرنا إدراج طريقة تعتمد القسمة الإقليدية للتدرب على استعمالها أفضل استعمال.

هناك طرق مختلفة للبرهان على مثل هذه العبارات ، أكثرها استعمالا مبدأ الترجع، لكن يبقى استعمال مفهوم التردد بالموافقة أبسط الطرق (رغم عدم إمكانية ذلك في بعض الحالات كالسؤال الثالث)، و أيضا استعمال الحالات على الباقي كالسؤال الرابع .

تمرين 2 :

لدينا a عدد فردي إذن : $\exists k\in IN \ / \ a=2k+1$ منه: $a^2-1=4k^2+4k+1-1=4k(k+1)$

و بما أن $k(k+1)$ عدد زوجي (انظر السؤال الأخير من التمرين السابق) فإن: $\exists k'\in IN \ / k(k+1)=2k'$

منه : $a^2-1=8k'$ مما يعني أن : $a^2\equiv 1\,[8]$

تمرين 3 :

لدينا باقي القسمة الإقليدية لـ 92 على a هو 14 إذن : $\exists q\in IN \ / \begin{cases}92=qa+14\\14<a\end{cases}$

و لدينا باقي القسمة الإقليدية لـ 131 على a هو 1 إذن : $\exists p\in IN \ / \begin{cases}131=pa+1\\1<a\end{cases}$

منه :

$$\begin{cases}78=qa\\130=pa\\a>14\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a/78\\a/130\\a>14\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a/78\wedge 130=26\\a>14\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\in\{1;13;26\}\\a>14\end{cases}\Rightarrow a=26$$

القسمة الإقليدية مفهوم رياضي جد مهم يجب استيعابه جيدا.

تمرين 4 : لدينا r باقي القسمة الإقليدية لـ a على b ، إذن : $\exists(q,r)\in IN^2 \ / \begin{cases}a=qb+r\\0\le r<b\end{cases}$

إذن: $0\le a-qb<b$ منه : $a-b<qb$ ، وبما أن $a-b\ge 0$ فإن: $0<qb$ منه : $q>0$ منه : $q\ge 1$ منه: $qb\ge b$

منه : $qb+r\ge b+r$ ، منه $a\ge b+r>r+r$ بالتالي : $a>2r$

تمرين 5 :

لدينا q خارج القسمة الإقليدية لـ n على a و p خارج القسمة الإقليدية لـ q على b

إذن: $\exists r_1 \in IN \;/\; \begin{cases} n = qa + r_1 \\ 0 \le r_1 < a \end{cases}$ و $\exists r_2 \in IN \;/\; \begin{cases} q = pb + r_2 \\ 0 \le r_2 < b \end{cases}$

إذن: $n = a(pb + r_2) + r_1 = ab\,p + (a r_2 + r_1)$

و لدينا : $\begin{cases} 0 \le r_1 < a \\ 0 \le r_2 < b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le r_1 \le a-1 \\ 0 \le r_2 \le b-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le r_1 \le a-1 \\ 0 \le ar_2 \le ab-a \end{cases} \Rightarrow 0 \le r_1 + a r_2 \le ab-1 \Rightarrow 0 \le r_1 + a r_2 < ab$

إذن : $\begin{cases} n = ab\,p + (a r_2 + r_1) \\ 0 \le r_1 + a r_2 < ab \end{cases}$ مما يعني أن p هو خارج القسمة الإقليدية لـ n على ab

لاحظ خلال تمارين القسمة الإقليدية أهمية العبارة : $\forall (x,y) \in Z^2 \quad (x < y \iff x \le y-1)$

تمرين 6 :

1 لدينا : $xy - x - y + 1 = x(y-1) - (y-1) = (y-1)(x-1)$

2 استنتج جميع الأزواج (x,y) من Z^2 التي تحقق :

$$xy - x - y = 19 \iff xy - x - y + 1 = 20 \iff (x-1)(y-1) = 20$$

$$xy - x - y = 19 \iff (x-1; y-1) \in \left\{ \begin{matrix} (20;1) \;;\; (1;20) \;;\; (-20;-1) \;;\; (-1;-20); \\ (2;10) \;;\; (10;2) \;;\; (-2;-10) \;;\; (-10;-2); \\ (5;4) \;;\; (4;5) \;;\; (-5;-4) \;;\; (-4;-5) \end{matrix} \right\}$$

$$xy - x - y = 19 \iff (x;y) \in \left\{ \begin{matrix} (21;2) \;;\; (2;21) \;;\; (-19\,;0) \;;\; (0\,;-19); \\ (3;11) \;;\; (11;3) \;;\; (-1;-9) \;;\; (-9\,;-1); \\ (6;5) \;;\; (5;6) \;;\; (-4;-3) \;;\; (-3;-4) \end{matrix} \right\}$$

اعتمدنا على التعميل السابق و على قواسم العدد 20

للتقليل من عدد الأسطر في الجواب استعملنا الطريقة أعلاه و هي طريقة سليمة من الناحية الرياضية

3 لدينا :

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3 \iff y + 2x = 3xy \iff 3xy - y - 2x = 0 \iff y(3x-1) - 2x = 0$$

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3 \iff 3y(3x-1) - 6x = 0 \iff 3y(3x-1) - 6x + 2 = 2 \iff 3y(3x-1) - 2(3x-1) = 2$$

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3 \iff (3x-1)(3y-2) = 2 \iff (3x-1; 3y-1) \in \{(1;2);(2;1);(-1;-2);(-2;-1)\}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3 \iff (3x;\, 3y) \in \{(2;4);(3;3);(0;0);(-1;1)\} \iff (x;\, y) \in \{(1;1)\}$$

بالتالي : $S = \{(1;1)\}$

تمعن جيدا في طريقة التعميل لأنه يمكن تعميمها لحل معادلة من الشكل : $a\,x + b\,y + c\,xy + d = 0$

حيث a و b و c و d أعداد صحيحة نسبية معلومة و x و y عددان نسبيان مجهولان.

تمرين 7 :

$$\frac{2n+101}{2n+1} \in Z \iff \frac{2n+1+100}{2n+1} \in Z \iff 1 + \frac{100}{2n+1} \in Z \iff \frac{100}{2n+1} \in Z \iff 2n+1/100 \iff 2n+1 \in \{1,5,25\}$$

$$\frac{2n+101}{2n+1} \in Z \iff 2n \in \{0,4,24\} \iff n \in \{0,2,12\}$$

استعملنا عبارة مهمة و هي : $\forall n \in Z \;\; \forall a \in IR \;\; (n + a \in Z \iff a \in Z)$

استثنينا قواسم 100 الزوجية لأن $2n+1$ عدد فردي.