

MERYEM LOULIDI

الفضاء في السلمي الجداء سلسلة تصحيح

تمرين:1

1- للمستوى ديكارتية معادلة:

$$M(x, y, z) \in (ABC) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y-1 & -1 & 2 \\ z & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x-1) - (-2)(y-1) + z = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2y + z - 5 = 0$$

خلاصة: معادلة ديكارتية للمستوى هي:

$$(ABC): 3x + 2y + z - 5 = 0$$

2- لنبين أن $x-4y+5z+3=0$ هي معادلة (Q)

الذي يتضمن المستقيم (AB) و العمودي على

:(ABC)

لدينا المستوى (Q) يتضمن المستقيم (AB)

إذن \overrightarrow{AB} موجهة ل (Q) و لدينا $\vec{n}(3,2,1)$ منظمية على

(ABC) و بما أن المستوى (Q) عمودي على (ABC)

فإن \vec{n} موجهة للمستوى (Q) و بالتالي المستوى

(Q) موجه ب $\vec{n}(3,2,1)$ و $\overrightarrow{AB}(1,-1,-1)$ و منه:

$$M(x, y, z) \in (Q) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \vec{n}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 3 \\ y-1 & -1 & 2 \\ z & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) - 4(y-1) + 5z = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 - 4y + 4 + 5z = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 4y + 5z + 3 = 0$$

$$(Q): x - 4y + 5z + 3 = 0$$

خلاصة:

3- تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) :

لدينا المستقيم (Δ) عمودي على المستوى (Q) و

لدينا $\vec{n}(1, -4, 5)$ منظمية على المستوى (Q) إذن \vec{n}

متجهة موجهة للمستقيم (Δ) :

و لدينا $\Omega(-2, 0, 3)$ منهو التمثيل البارامتري

للمستقيم (Δ) كالتالي:

$$(\Delta) \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -4t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$$

4- معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي مركزها Ω و

المماسية للمستوى (ABC) لنحدد المسافة

$$: d(\Omega, (ABC))$$

$$\begin{aligned} d(\Omega, (ABC)) &= \frac{|3 \times (-2) + 2 \times 0 + 3 - 5|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} \\ &= \frac{|-6 + 3 - 5|}{\sqrt{9 + 41}} = \frac{4\sqrt{14}}{7} \end{aligned}$$

و منه:

$$R = \frac{4\sqrt{14}}{7}$$

و لدينا $\Omega(-2, 0, 3)$ هي مركز الفلكة (S) إذن معادلة:

$$(x + 2)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = \frac{32}{7}$$

5- لندرس تقاطع الفلكة (S) و المستقيم (CD) :

نحدد معادلتين ديكارتيتين لـ (CD) :

لدينا (CD) موجه بـ $\overrightarrow{CD}(-1,1,1)$ و يمر من $C(0,3,-1)$ و منه

تمثيل بارامتري لـ (CD) هو:

$$(CD) \begin{cases} x = -t \\ y = 3+t \\ z = 1+t \end{cases}$$

لهذا نحل النظمة التالية :

$$M(x, y, z) \in (S) \cap (CD) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2 + 4^2 + (z+3)^2 = \frac{32}{7} \\ x = -t \\ y = 3+t \\ z = -1+t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (2+t)^2 + (3+t)^2 + (t-4)^2 = \frac{32}{7}$$

$$\Leftrightarrow 3t^2 - 6t + \frac{171}{7} = 0$$

$$\Delta = 36 - 4 \times 3 \times \frac{171}{7} = \frac{-1800}{7}$$

و منه المعادلة ليس لها حل.

خلاصة:

$$(CD) \cap (S) = \emptyset$$

نأخذ المستقيم خارج الفلكة.

تمرين: 2

1- لنحدد المركز Ω و الشعاع R للمعادلة (S) :

لدينا:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y = 0$$

أي:

$$(x-1)^2 - 1 + (z+1)^2 - 1 + y^2 = 0$$

و منه:

$$(x-1)^2 + (z+1)^2 + y^2 = \sqrt{2}^2$$

و منه: $\Omega(1,0,-1)$ و $R = \sqrt{2}$

2- نبين أن (D) يقطع الفلكة (S) في A و B

لهذا نحل النظمة التالية:

$$M(x, y, z) \in (D) \cap (S) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 - 2 = 0 \\ x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1 + \lambda - 1)^2 + \lambda^2 + (\lambda + 1)^2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \lambda^2 + \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 3\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -1 \text{ أو } \lambda = \frac{1}{3}$$

$$\lambda = \frac{1}{3}$$

نعوض في النظمة:

$$\begin{cases} x = 1 - 1 = 0 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$(D) \cap (S) = \left\{ A(0, -1, -1), B\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\} \text{ و منه:}$$

3- نبين أن المستوى (P) مماس للفاكة في A :

ليكن (T) مماس للفاكة (S) في A

$$M(x, y, z) \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y+1 \\ z+1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y + 1 = 0$$

هذه المعادلة تمثل معادلة المستوى (P) و نعلم أنه

يوجد مستوى وحيد

للفلحة في نقطة A إذن :

$$(P) = (T)$$

بالتالي (P) مماس للفلحة في النقطة A

4- لنحدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المماس

للفلحة (S) في B :

$$M(x, y, z) \in (Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{B\Omega} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3x-4 \\ 3y-1 \\ 3z-1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x - 3y - 12z + 4 + 1 + 4 = 0$$

$$(Q): x + y + 4z - 3 = 0$$

5- نثبت أن (P) و (Q) يتقاطعان وفق (Δ) :

حيث (Δ) عمودي على $(B\Omega A)$:

$$M(x, y, z) \in (P) \cap (Q) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x + y + 4z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 - x \\ 4z = -x - y + 3 \end{cases}$$

نضع: $t = x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -1 - t \\ 4z = 1 + 1 + t + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -1 - t / t \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$$

$\vec{u}(1, -1, 0)$ متجهة موجهة ل (D) .

- بين أن (Δ) عمودي على $(B\Omega A)$ لذلك نحسب :

$$\overrightarrow{\Omega B} \cdot \overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 + 1 = 0$$

و بالتالي (Δ) عمودي على $(B\Omega A)$.

التمرين: 3

1- نبين أن A و B و D غير مستقيمة:

$$\overrightarrow{AB}(-4, -4, 4) \quad \overrightarrow{AC}(-1, -4, -2)$$

نحسب Δ :

$$\Delta \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -16 - 8 = -24 \neq 0$$

خلاصة: A و B و C غير مستقيمة.

2- نبين أن $\vec{n}(2, -1, 1)$ منظمية على (ABC) :

(ABC) موجه ب \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} إذن نحسب كل من:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} \quad \text{و} \quad \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = -8 + 4 + 4 = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 + 4 - 2 = 0$$

إذن \vec{n} منظمية على (ABC).

3- نبين أن G :

$$(P): x + y - z + 2 = 0$$

إذن $\vec{n}(1,1,-1)$ منظمية على (P) نبين أن $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$:

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 - 1 - 1 = 0$$

خلاصة: $(ABC) \perp (P)$

4- أ- نبين أن الثابتات G في (2,0,5) :

لدينا G مرجح (C,2);(B,-1);(A,1) إذن :

$$x_G = \frac{1 \times 1 + (-1)(-3) + 2 \times 0}{-1 + 1 + 2} = 0$$

$$y_G = \frac{1 \times 2 + (-1)(-2) + 2 \times (-2)}{2} = 0$$

$$z_G = \frac{1 \times (-1) - 1 \times 3 + 2 \times (-3)}{2} = -5$$

خلاصة: $G(2, 0, -5)$

ب- نبين أن $(P) \perp (CG)$:

لدينا (CG) و \vec{n}' مستقيمتين و منه $(CG) \perp (P)$.

ج- نحدد إحداثيات H تقاطع (CG) و المستوى (P) :

لدينا (CG) يمر من C و موجه ب \vec{CG} :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -2 + 2t / t \in \mathbb{R} \\ z = -3 - 2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x = 2t \\ y = -2t + 2t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2t - 2 + 2t + 3 + 2t + 2 = 0 \\ x = 2t \\ y = -2 + 2t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \frac{-1}{2} \\ x = -1 \\ y = -3 \\ z = -2 \end{cases}$$

خلاصة: $H(-1, -3, -2)$

5- نحدد المجموعة (S) للنقط M من الفضاء التي تحقق:

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 12 \Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MG}\| = 12 \Leftrightarrow MG = 6$$

خلاصة:

مجموعة النقط (S) هي الفلكة التي مركزها $G(2,0,-5)$

و شعاعها $R=6$.

6- نحدد طبيعة العناصر المميزة لتقاطع المستوى (P)

و الفلكة (S) : لنحسب $d(G(P))$

$$d(G(P)) = \frac{|2+5+2|}{\sqrt{3}} = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$$

و لدينا $3\sqrt{3} < 6$ إذن (P) و (S) يتقاطعان وفق دائرة مركزها

$M(x,y,z)$ المسقط العمودي ل G على (P) و شعاعها r :

$$r = \sqrt{R^2 + d^2} = \sqrt{36 - 27} = \sqrt{9} = 3$$

نحدد $D(x,y,z)$. لذلك نحل النظمة :

$$\begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x = 2 + t \\ y = t \\ z = -5 - t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2+t+t+5+t+2=0 \\ \mathbf{x=2+t} \\ \mathbf{y=0} \\ \mathbf{z=-5-t} \end{cases} / t \in \mathfrak{R}$$

$$\begin{cases} \mathbf{t=-3} \\ \mathbf{x=2+t} \\ \mathbf{y=t} \\ \mathbf{z=-5-t} \end{cases} / t \in \mathfrak{R}$$

إذن $H(-1,-3,-2)$.

خلاصة: تقاطع المستوى (P) و الفلكة (S) هي دائرة (C)

مركزها $H(-1,-3,-2)$ و شعاعها $r=3$.

