سلسلة 1	المجموعات و التطبيقات حل مقترح	السنة 1 بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1 : $E=\{1;4;-5;3\}$

1) $\mathrm{P}(E)=\left\{\begin{matrix}\phi,\{1\},\{4\},\{-5\},\{3\},\{1;4\},\{1,-5\},\{1,3\},\{4;-5\},\{4;3\} \\ ,\{-5;3\},\{1,4,-5\},\{1,4,3\},\{1;-5;3\},\{4;-5;3\},\{1;4;-5;3\}\end{matrix}\right\}$ ، $P(E)$ تتكون من 16 مجموعة

2) $K=\{A\in\mathrm{P}(E)/\quad 4\in A\}=\{\{4\},\{1;4\},\{4;-5\},\{4;3\},\{1,4,-5\},\{1,4,3\},\{4;-5;3\},\{1;4;-5;3\}\}$

3) $H=\{X\in\mathrm{P}(E)/\quad 5\notin X\}=\phi,\{1\},\{4\},\{3\},\{1;4\},\{1,3\},\{4;3\},\{1,4,3\},\{1;4;-5;3\}\}$

تمرين 2 : $E=IR$ ، $A=[2;5]$ ، $B=]-\infty;3]$ ، $C=]-2;4[\cup]6;+\infty[$

$\overline{A}=\{x\in IR/x\notin A\}=]-\infty;2[\cup]5;+\infty[$

$\overline{B}=\{x\in IR/x\notin B\}=]3;+\infty[$

$\overline{C}=\{x\in IR/x\notin C\}=]-\infty;2]\cup[4;6]$

$A\setminus \mathrm{B}=\{\mathrm{x}\in\mathrm{A}\text{ et }\mathrm{x}\notin\mathrm{B}\}=A\cap\overline{B}=[2;5]\cap]3;+\infty]=]3;5]$

$C\cap B=\{\mathrm{x}\in\mathrm{C}\text{ et }\mathrm{x}\in\mathrm{B}\}=]-2;3]$

$A\cup B=\{\mathrm{x}\in\mathrm{A}\ ou\ \mathrm{x}\in\mathrm{B}\}=]-\infty;5]$

تمرين 3 :

$(A\setminus\mathrm{C})\cup C=(A\cap\overline{\mathrm{C}})\cup C=(A\cup C)\cap(\overline{C}\cup C)=(A\cup C)\cap E=A\cup C$

لاحظ أن: $X\cap E=X\quad \forall X\in P(E)$ و $X\cup\overline{X}=E\quad \forall X\in P(E)$ ،

$(A\setminus\mathrm{C})\cap(B\setminus\mathrm{C})=(A\cap\overline{C})\cap(B\cap\overline{C})=A\cap\overline{C}\cap B\cap\overline{C}=A\cap B\cap\overline{C}\cap\overline{C}=(A\cap B)\cap\overline{C}=(A\cap B)\setminus C$

بوجود التقاطع فقط أو الاتحاد فقط يمكن مبادلة المجموعات و الأقواس

$(A\setminus\mathrm{C})\cup(B\setminus\mathrm{C})=(A\cap\overline{C})\cup(B\cap\overline{C})=(A\cup B)\cap\overline{C}=(A\cup B)\setminus\mathrm{C}$

التعميل (نعني: $(Z\cap X)\cup(Z\cap X)=Z\cap(X\cup Y)$ و $(Z\cup X)\cap(Z\cup Y)=Z\cup(X\cap Y)$) يكون مفيدا جدا و يختصر الجواب في كثير من الحالات كهذا السؤال.

لدينا:
$$(A\setminus\mathrm{C})\setminus(B\setminus\mathrm{C})=(A\cap\overline{C})\cap\overline{(B\cap\overline{C})}=(A\cap\overline{C})\cap(\overline{B}\cup C)=((A\cap\overline{C})\cap\overline{B})\cup((A\cap\overline{C})\cap C)$$
$$=(A\cap\overline{C}\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{C}\cap C)=(A\cap\overline{C}\cap\overline{B})\cup(A\cap\phi)=(A\cap\overline{C}\cap\overline{B})\cup(\phi)$$
$$(A\setminus\mathrm{C})\setminus(B\setminus\mathrm{C})=A\cap\overline{C}\cap\overline{B}$$

و من جهة أخرى : $(A\setminus B)\setminus\mathrm{C}=(A\cap\overline{B})\cap\overline{C}=A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$

و من جهة ثالثة : $A\setminus(\mathrm{B}\cup\mathrm{C})=A\cap\overline{(\mathrm{B}\cup\mathrm{C})}=A\cap(\overline{B}\cap\overline{C})=A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$

بالتالي : $(A\setminus\mathrm{C})\setminus(B\setminus\mathrm{C})=(A\setminus B)\setminus\mathrm{C}=A\setminus(\mathrm{B}\cup\mathrm{C})$

استعملنا الخاصيتين ($\overline{(X\cap Y)}=(\overline{X}\cup\overline{Y})$ و $\overline{(X\cup Y)}=(\overline{X}\cap\overline{Y})$)

لاحظ أيضا فكرة البرهان، حيث بسطنا كل تعبير على حدة و قارنا النتائج.

تمرين 4 :

لدينا:

$$B=(B\setminus A)\cup(B\cap A)$$
$$B=(B\cap\overline{A})\cup(C\cap A)$$
$$B=(B\cup C)\cap(B\cup A)\cap(\overline{A}\cup C)\cap(\overline{A}\cup A)$$
$$B=(B\cup C)\cap(C\cup A)\cap(\overline{A}\cup C)\cap E$$
$$B=C\cup(B\cap A\cap\overline{A})$$
$$B=C\cup(B\cap\phi)$$
$$B=C\cup\phi$$
$$B=C$$

- استعملنا بداية المتساوية الهامة : ($B=(B\setminus A)\cup(B\cap A)$ و التي يمكن البرهان عنها بسهولة أو من خلال مخطط

$$(B\setminus A)\cup(B\cap A)=(B\cap\overline{A})\cup(B\cap A)$$
$$=B\cap(\overline{A}\cup A)=B\cap E=B$$
(

- في السطر الثالث قمنا بالنشر (مثل نشر مجموع في مجموع)
- استعملنا بعض المتساويات الواضحة: $X\cap E=X$ و $X\cap\phi=\phi$ و $X\cup\phi=X$ (
- يمكن أيضا استعمال الطريقة الاعتيادية، حيث نأخذ عنصرا x من B ونبين أنه ينتمي لـ C، لكن في هذه الطريقة يجب أن نفصل حالتين $x\in A$ و $x\notin A$، و طبعا نعيد الطريقة للبرهان على التضمن العكسي

تمرين 5 : $X\Delta Y=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)$

1

$$X\Delta Y=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)=(Y\setminus X)\cup(X\setminus Y)=Y\Delta X$$

2

$$X\Delta X=(X\setminus X)\cup(X\setminus X)=\phi\cup\phi=\phi$$
$$X\Delta E=(X\setminus E)\cup(E\setminus X)=(X\cap\overline{E})\cup(E\cap\overline{X})=(X\cap\phi)\cup(\overline{X})=\phi\cup(\overline{X})=\overline{X}$$
$$X\Delta\overline{X}=(X\setminus\overline{X})\cup(\overline{X}\setminus X)=(X\cap X)\cup(\overline{X}\cap\overline{X})=(X)\cup(\overline{X})=E$$
$$X\Delta\phi=(X\setminus\phi)\cup(\phi\setminus X)=(X\cap\overline{\phi})\cup(\phi\cap\overline{X})=(X\cap E)\cup\phi=X$$

3

$$\overline{X}\Delta\overline{Y}=(\overline{X}\cap Y)\cup(\overline{Y}\cap X)=X\Delta Y$$

4

$$(X\cup Y)\setminus(X\cap Y)=(X\cup Y)\cap\overline{(X\cap Y)}=(X\cup Y)\cap(\overline{X}\cup\overline{Y})=(X\cap\overline{X})\cup(X\cap\overline{Y})\cup(Y\cap\overline{X})\cup(Y\cap\overline{Y})$$
$$=\phi\cup(X\cap\overline{Y})\cup(Y\cap\overline{X})\cup\phi=(X\cap\overline{Y})\cup(Y\cap\overline{X})=X\Delta Y$$

- المطلوب إثبات متساوية، لذلك من الأفضل البدأ بالتعبير الذي يمكن إجراء عمليات عليه و الذي في حالتنا هو $(X\cup Y)\setminus(X\cap Y)$.

تمرين 6 :

لدينا :

$$X\setminus Y=\phi\Rightarrow X\cap\overline{Y}=\phi\Rightarrow(X\cap\overline{Y})\cup Y=Y\Rightarrow(X\cup Y)\cap(\overline{Y}\cup Y)=Y\Rightarrow(X\cup Y)\cap E=Y$$
$$\Rightarrow X\cup Y=Y\Rightarrow X\subset Y$$

عكسيا:

$$X\subset Y\Rightarrow X\cap\overline{Y}\subset Y\cap\overline{Y}\Rightarrow X\cap\overline{Y}\subset\phi\Rightarrow X\setminus Y=\phi$$

- للبرهان أن مجموعة ضمن أخرى يمكن البرهان أن اتحادهما يساوي إحداهما أو تقاطعهما يساوي إحداهما.
- كل مجموعة ضمن المجموعة الفارغة هي مجموعة فارغة