سلسلة 3	المجموعات و التطبيقات حلول مقترحة	السنة 1 بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1 :
$$f: IR^+ \to IR$$
$$x \mapsto x-6\sqrt{x}$$

1
$$f^{-1}([-9,0])=\{x\in IR^+ / f(x)\in[-9;0]\}=\{x\in IR^+ / -9\le f(x)\le 0\}=\{x\ge 0/ -9\le x-6\sqrt{x}\le 0\}$$
$$f^{-1}([-9,0])=\{x\ge 0/ 0\le x-6\sqrt{x}+9\le 9\}=\{x\ge 0/ 0\le(\sqrt{x}-3)^2\le 9\}=\{x\ge 0/ \ |\sqrt{x}-3|\le 3\}$$
$$f^{-1}([-9,0])=\{x\ge 0/ \ -3\le\sqrt{x}-3\le 3\}=\{x\ge 0/ \ 0\le\sqrt{x}\le 6\}=\{x\ge 0/ \ 0\le x\le 36\}$$
$$f^{-1}([-9,0])=[0;36]$$

2
$$x\in[1;4] \Rightarrow 1\le x\le 4 \Rightarrow 1\le\sqrt{x}\le 2 \Rightarrow -2\le\sqrt{x}-3\le -1 \Rightarrow 1\le 3-\sqrt{x}\le 2$$
لدينا: $x\in[1;4] \Rightarrow 1\le(3-\sqrt{x})^2\le 4 \Rightarrow 1\le x-6\sqrt{x}+9\le 4 \Rightarrow -8\le x-6\sqrt{x}\le -5$
$$x\in[1;4] \Rightarrow f(x)\in[-8;-5]$$
منه: $f([1;4])\subset[-8;-5]$

عكسيا، ليكن: $y\in[-8;-5]$ ، لنحل في المجال $[1;4]$ المعادلة : $f(x)=y$
$$f(x)=y \Leftrightarrow x-6\sqrt{x}=y \Leftrightarrow x-6\sqrt{x}+9=y+9 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-3)^2=y+9$$
و حيث أن : $y+9\in[1;4]$ فإن :
$$f(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{x}-3=\sqrt{y+9} \quad ou \quad \sqrt{x}-3=-\sqrt{y+9}$$
$$f(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{x}=3+\sqrt{y+9} \quad ou \quad \sqrt{x}=3-\sqrt{y+9}$$
و حيث أن : $\sqrt{y+9}\in[1;2]$ فإن : $-\sqrt{y+9}\in[-2;-1]$ منه : $3-\sqrt{y+9}\in[1;2]$

منه: $f(x)=y \Leftrightarrow x=(3+\sqrt{y+9})^2 \quad ou \quad x=(3-\sqrt{y+9})^2$

إذن هذه المعادلة تقبل حلا على الأقل $x=(3-\sqrt{y+9})^2$ في المجال $[1;4]$، بمعنى أن : $[-8;-5]\subset f([1;4])$

بالتالي : $[-8;-5]=f([1;4])$

تمرين 2 :
$$f: IR \to IR$$
$$x \mapsto \frac{x^2+2}{x^2+1}$$

1
$$f^{-1}(]0;1[)=\{x\in IR/ f(x)\in]0;1[\}=\{x\in IR/ 0<f(x)<1\}=\left\{x\in IR/ 0<\frac{x^2+2}{x^2+1}<1\right\}$$
$$f^{-1}(]0;1[)=\left\{x\in IR/ 0<\frac{x^2+1+1}{x^2+1}<1\right\}=\left\{x\in IR/ 0<1+\frac{1}{x^2+1}<1\right\}=\left\{x\in IR/ -1<\frac{1}{x^2+1}<0\right\}$$
$$f^{-1}(]0;1[)=\{x\in IR/ -x^2-1<1<0\}=\emptyset$$

الصورة العكسية لمجموعة قد تكون فارغة كما هو في المثال أعلاه.

2
لدينا: $x\in[1;+\infty[\Rightarrow x\ge 1 \Rightarrow x^2\ge 1 \Rightarrow x^2+1\ge 2 \Rightarrow 0<\frac{1}{x^2+1}\le\frac{1}{2} \Rightarrow 1<1+\frac{1}{x^2+1}\le\frac{3}{2}$

و
$$x\in[1;+\infty[\Rightarrow 1<f(x)\le\frac{3}{2} \Rightarrow f(x)\in\left]1;\frac{3}{2}\right]$$

منه: $f([1;+\infty[)\subset\left]1;\frac{3}{2}\right]$

عكسيا: ليكن: $y\in\left]1;\frac{3}{2}\right]$ ، لنحل في المجال $[1;+\infty[$ المعادلة: $f(x)=y$

$$f(x)=y \Leftrightarrow 1+\frac{1}{x^2+1}=y \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1}=y-1 \Leftrightarrow x^2+1=\frac{1}{y-1}$$

$$f(x)=y \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{y-1}-1=\frac{2-y}{y-1} \Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{2-y}{y-1}} \ ou \ x=-\sqrt{\frac{2-y}{y-1}}$$

وحيث أن: $y\in\left]1;\frac{3}{2}\right]$ فإن: $y-1\in\left]0;\frac{1}{2}\right]$ منه: $\frac{1}{y-1}\in[2;+\infty[$ منه: $\frac{1}{y-1}-1\in[1;+\infty[$

منه: $\sqrt{\frac{1}{y-1}-1}\in[1;+\infty[$ ، إذن هذه المعادلة تقبل حلا $x=\sqrt{\frac{2-y}{y-1}}$ في المجال $[1;+\infty[$

بمعنى أن: $\left]1;\frac{3}{2}\right]\subset f([1;+\infty[)$ ، بالتالي $f([1;+\infty[)=\left]1;\frac{3}{2}\right]$

لاحظ أهمية تغيير تعبير الدالة من $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1}$ إلى $f(x)=1+\frac{1}{x^2+1}$

تمرين 3 : نعتبر التطبيق المعرف بما يلي :

$$f:\ IR^* \to IR$$
$$x \mapsto x+\frac{1}{x}$$

1

$$f^{-1}([1,2])=\{x\in IR^*\ /\ f(x)\in[1,2]\}=\{x\in IR^*\ /\ 1\le f(x)\le 2\}=\left\{x\in IR^*\ /\ 1\le x+\frac{1}{x}\le 2\right\}$$

$$f^{-1}([1,2])=\left\{x\in IR^*\ /\ 1\le\frac{x^2+1}{x}\le 2\right\}=\left\{x\in IR^*\ /\ 1\le\frac{x^2+1}{x}\ \ et\ \ \frac{x^2+1}{x}\le 2\right\}$$

ولدينا: $1\le\frac{x^2+1}{x}\Rightarrow x>0$ منه: $\frac{x^2+1}{x}\le 2\Rightarrow x^2+1\le 2x\Rightarrow (x-1)^2\le 0\Rightarrow x=1$

وعكسيا : $f(1)=2\in[1;2]$ ، بالتالي: $f^{-1}([1,2])=\{1\}$

2

لدينا: $x\in\left[\frac{1}{2};2\right]\Rightarrow f(x)-f(1)=x+\frac{1}{x}-2=\frac{x^2+1-2x}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}\ge 0\Rightarrow f(x)\ge f(1)$

من جهة أخرى:

$$x\in\left[\frac{1}{2};2\right]\Rightarrow f(x)-f(2)=x+\frac{1}{x}-\frac{5}{2}=\frac{2x^2+2-5x}{x}=\frac{2x^2-5x+2}{x}=\frac{(2x-1)(x-2)}{x}\le 0\Rightarrow f(x)\le f(2)$$

بالتالي: $x\in\left[\frac{1}{2};2\right]\Rightarrow f(1)\le f(x)\le f(2)$

3

لدينا حسب السؤال السابق : $f\left(\left[\frac{1}{2},2\right]\right)\subset\left[2;\frac{5}{2}\right]$

عكسيا: ليكن: $y\in\left[2;\frac{5}{2}\right]$ ، لنحل في المجال $\left[\frac{1}{2},2\right]$ المعادلة: $f(x)=y$

$$f(x)=y \Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=y \Leftrightarrow x^2-yx+1=0 \ ،\ \Delta=y^2-4\ge 0$$

إذن المعادلة تقبل حلين في IR : $x_1=\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}$ أو $x_2=\frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2}$

ولدينا : $y\ge 2\Rightarrow x_1=\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}\ge\frac{y}{2}\ge\frac{2}{2}\ge 1$

و $2\le y\le\frac{5}{2}\Rightarrow 4\le y^2\le\frac{25}{4}\Rightarrow 0\le y^2-4\le\frac{9}{4}\Rightarrow 0\le\sqrt{y^2-4}\le\frac{3}{2}\Rightarrow x_1=\frac{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}{2}\le 2$

منه: $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$ بالتالي: $f\left(\left[\frac{1}{2},2\right]\right)=\left[2;\frac{5}{2}\right]$

تمرين 4 :

1

لنبين أن : $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

نفترض أن $A \subset B$ و لنبين أن: $f(A) \subset f(B)$

لدينا: $y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A \ / \ y = f(x) \Rightarrow \exists x \in B \ / \ y = f(x) \Rightarrow y \in f(B)$ ، بالتالي : $f(A) \subset f(B)$

2

لنبين أن : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

لدينا : $A \subset A \cup B$ إذن حسب السؤال السابق $f(A) \subset f(A \cup B)$

و أيضا : $B \subset A \cup B \Rightarrow f(B) \subset f(A \cup B)$

لدينا إذن : $\begin{cases} f(A) \subset f(A \cup B) \\ f(B) \subset f(A \cup B) \end{cases} \Rightarrow f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$

من جهة أخرى : $y \in f(A \cup B) \Rightarrow \exists x \in A \cup B \ / \ y = f(x) \Rightarrow \exists x \in A \ ou \ x \in B \ / \ y = f(x)$

$\Rightarrow y \in f(A) \ ou \ y \in f(B) \Rightarrow y \in f(A) \cup f(B)$

منه : $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ ، بالتالي : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

3

لنبين أن: $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

و أيضا : $\begin{cases} A \cap B \subset A \\ A \cap B \subset B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(A \cap B) \subset f(A) \\ f(A \cap B) \subset f(B) \end{cases} \Rightarrow f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

4

لنبين أن : $f(¤) = ¤$ ، سنستعمل برهانا بالخلف ، نفترض أن: $f(¤) \neq ¤$ إذن $f(¤)$ تحتوي على الأقل على عنصر y ، وحسب تعريف صورة مجموعة بتطبيق فإنه يوجد عدد $x \in ¤$ بحيث $y = f(x)$ ، وهذا غير ممكن لأن ¤ لا تتضمن أي عنصر.

5

لنبين أن: $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$ ، نفترض أن $C \subset D$ و لنبين أن: $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$

لدينا: $x \in f^{-1}(C) \Rightarrow f(x) \in C \Rightarrow f(x) \in D \Rightarrow x \in f^{-1}(C)$ ، بالتالي: $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$

6

لنبين أن: $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

لدينا : $\begin{cases} C \subset C \cup D \\ D \subset C \cup D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(C) \subset f^{-1}(C \cup D) \\ f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cup D) \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cup D)$

من جهة أخرى : $x \in f^{-1}(C \cup D) \Rightarrow f(x) \in C \cup D \Rightarrow f(x) \in C \ ou \ f(x) \in D$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(C) \ ou \ x \in f^{-1}(D) \Rightarrow x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

منه : $f^{-1}(C \cup D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ ، بالتالي : $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

7

لنبين أن : $f^{-1}(C \cap D) \subset f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

لدينا: $\begin{cases} C \cap D \subset C \\ C \cap D \subset D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(C \cap D) \subset f^{-1}(C) \\ f^{-1}(C \cap D) \subset f^{-1}(D) \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(C \cap D) \subset f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

8

لنبين أن $f^{-1}(¤) = ¤$ ، نفترض أن: $f^{-1}(¤) \neq ¤$ إذن: $f^{-1}(¤)$ تتضمن عنصرا x على الأقل، إذن $f(x) \in ¤$ و هذا غير ممكن ، إذن: $f^{-1}(¤) = ¤$

9

لنبين أن: $f^{-1}(F) = E$

لدينا : $x \in E \Rightarrow f(x) \in F \Rightarrow x \in f^{-1}(F)$ ، منه: $E \subset f^{-1}(F)$

و لدينا: $x \in f^{-1}(F) \Rightarrow f(x) \in F \ / \ x \in E \Rightarrow x \in E$ منه: $f^{-1}(F) \subset E$ ، بالتالي : $f^{-1}(F) = E$

10

العبارة $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$ ليست صحيحة دائما

مثلا نأخذ: $E = \{1,2,3,4\}$ و $F = \{0\}$ بحيث جميع عناصر E لها نفس الصورة 0

و نأخذ: $A = \{1;2\}$ و $B = \{3;4\}$

و هكذا يكون لدينا: $f(A)=\{0\}$ و أيضا $f(B)=\{0\}$ منه: $f(A)=f(B)$ لكن : $\{1;2\}\not\subset\{3;4\}$

11
العبارة $f(A)\cap f(B)\subset f(A\cap B)$ ليست صحيحة دائما
نفس المثال السابق: $f(A)\cap f(B)=\{0\}\cap\{0\}=\{0\}$ و $f(A\cap B)=f(¤)=¤$
لكن العبارة: $\{0\}\subset ¤$ غير صحيحة

1) **تمرين 5** : ليكن f تطبيقا من مجموعة E نحو مجموعة F و ليكن X جزءا من E و Y جزءا من F .

1
لنبين أن: $X\subset f^{-1}(f(X))$
لدينا : $x\in X \Rightarrow f(x)\in f(X)\Rightarrow x\in f^{-1}(f(X))$ ، بالتالي : $X\subset f^{-1}(f(X))$

2
لدينا : $y\in f\left(f^{-1}(Y)\right)\Rightarrow \exists x\in f^{-1}(Y)/\, y=f(x)\Rightarrow f(x)\in Y/\, y=f(x)\ \Rightarrow y\in Y$
بالتالي: $f\left(f^{-1}(Y)\right)\subset Y$

تبدو مثل هذه العبارات صعبة البرهان، لكنها على العكس تماما، فقط يجب إدراك مفهوم صورة مجموعة بتطبيق و الصورة العكسية لمجموعة بتطبيق إدراكا جيدا

تمرين 6 :
$$f:\ IR^* \to IR$$
$$x \mapsto x+\frac{1}{x}$$

- لنبين أولا أن f تباين على $[1;+\infty[$

لدينا لكل $(x;y)\in[1;+\infty[^2$:
$$f(x)=f(y)\ \Rightarrow x+\frac{1}{x}=y+\frac{1}{y}\Rightarrow x-y+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=0\Rightarrow (x-y)-\frac{(x-y)}{xy}=0$$
$$f(x)=f(y)\ \Rightarrow (x-y)\left(\frac{xy-1}{xy}\right)=0\Rightarrow\ x=y\ ou\ xy=1$$

و بما أن: $\begin{cases} xy=1\\ x\geq 1\\ y\geq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{1}{y}\\ x\geq 1\\ \dfrac{1}{y}\leq 1\end{cases}\Rightarrow (1\leq x\leq 1)\Rightarrow (x=1)\Rightarrow (y=1)\Rightarrow (x=y=1)$ فإن: $f(x)=f(y)\ \Rightarrow x=y$

- لنبين أن f شمول على $[2;+\infty[$

ليكن $y\in[2;+\infty[$ و لنبين أن المعادلة: $f(x)=y$ تقبل على الأقل حلا في $[1;+\infty[$

لدينا: $\begin{cases} x^2-yx+1=0\\ x\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=y\\ x\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)=y\\ x\in[1;+\infty[\end{cases}$ و لدينا : $\Delta=y^2-4\geq 0$

منه: $\begin{cases} x=\dfrac{y-\sqrt{y^2-4}}{2}\ \ ou\ \ x=\dfrac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}\\ x\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=y\\ x\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f(x)=y\\ x\in[1;+\infty[\end{cases}$

و لدينا : $\dfrac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}\geq\dfrac{y}{2}\geq 1$ ، إذن أن المعادلة : $f(x)=y$ تقبل على الأقل الحل $\dfrac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}$ في $[1;+\infty[$

إذن f شمولية على $[2;+\infty[$ ، بالتالي f تقابل من $[1;+\infty[$ نحو $[2;+\infty[$ و تقابله العكسي f^{-1} معرف كما يلي :
$$f^{-1}\ [2;+\infty[\to[1;+\infty[$$
$$x\mapsto\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$$

للبرهان على التقابل يمكن البرهان أن للمعادلة $f(x)=y$ حلا وحيدا في مجموعة الانطلاق، لكن هذا الأمر يكون صعبا كما هو الشأن في هذا التمرين، لذلك تكون أفضل وسيلة هي البرهان عن التباين ثم الشمول.

تمرين 7 : نعتبر التطبيق المعرف بما يلي : $\begin{array}{l} f: \quad IR \to IR \\ x \mapsto x|x| \end{array}$

- لنبين أن f تقابل من IR نحو IR

ليكن $y \in IR$ ولنبين أن المعادلة : $f(x)=y$ تقبل حلا وحيدا في IR

لدينا : $f(x)=y \Leftrightarrow x|x|=y$

إذا كان : $y \geq 0$ فإن : $f(x)=y \Leftrightarrow \begin{cases} x|x|=y \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=y \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{y}$

و إذا كان : $y<0$ فإن : $f(x)=y \Leftrightarrow \begin{cases} x|x|=y \\ x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2=y \\ x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=-y \\ x<0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\sqrt{-y}$

في كل الحالات المعادلة : $f(x)=y$ تقبل على الأقل حلا في IR

بالتالي: f تقابل من IR نحو IR و تقابله العكسي f^{-1} معرف كما يلي : $\begin{array}{l} f^{-1} \; IR \to IR \\ x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & si \quad x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & si \quad x<0 \end{cases} \end{array}$

هذا مثال تطبيق يكون تقابله العكسي معرف على مجالات

البرهان على التقابل في هذا التمرين تم بالبرهان على وجود و وحدانية حلول المعادلة $f(x)=y$ دون الحاجة للتباين، لكن يجب الانتباه أن ذلك يتطلب عبارة متكافئة و ليس استلزاما.

تمرين 8 : نعتبر التطبيقين : $f: \quad E \to F$ و $g: \quad F \to G$

1

- لنبين أن : f تباين $\Rightarrow \quad \forall X \in P(E): f^{-1}(f(X))=X$

ليكن $(x;y) \in E^2$ بحيث: $f(x)=f(y)$

لدينا : $f(\{x\})=\{f(x)\}$ و $f(\{y\})=\{f(y)\}$

و بما أن $f(x)=f(y)$ فإن : $f(\{y\})=f(\{x\})$ منه : $f^{-1}(f(\{y\}))=f^{-1}(f(\{x\}))$

و حسب المعطيات و بأخذ $X=\{x\}$ ثم $X=\{y\}$

فإننا نستنتج أن : $\{x\}=\{y\}$ منه: $x=y$

- لنبين أن : $\forall X \in P(E): f^{-1}(f(X))=X \Rightarrow f$ تباين

ليكن $X \in P(E)$

لدينا من جهة: $x \in X \Rightarrow f(x) \in f(X) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(X))$ منه : $X \subset f^{-1}(f(X))$

و من جهة أخرى : $x \in f^{-1}(f(X)) \Rightarrow f(x) \in f(X) \Rightarrow \begin{cases} f(x)=f(a) \\ a \in X \end{cases}$

و باستعمال تباين الدالة نستنتج أن : $x=a$ ومنه: $x \in X$ ، إذن $f^{-1}(f(X)) \subset X$

بالتالي: $f^{-1}(f(X))=X$

خلاصة: f تباين $\Leftrightarrow \quad \forall X \in P(E): f^{-1}(f(X))=X$

2

- لنبين أن : f شمول $\Rightarrow \quad \forall Y \in P(F): f(f^{-1}(Y))=Y$

ليكن $y \in F$ ، منه $\{y\} \subset F$ أي: $\{y\} \in P(F)$ ، إذن حسب المعطيات: $f(f^{-1}(\{y\}))=\{y\}$

إذن $\exists a \in f^{-1}(\{y\}) \; / \; f(a)=y$ ، و بما أن $f^{-1}(\{y\}) \subset E$ فإن : $\exists a \in E \; / \; f(a)=y$ ، إذن : f شمول

- لنبين أن $\forall Y \in P(F): f(f^{-1}(Y))=Y \Rightarrow f$ شمول

ليكن $Y \in P(F)$ ، لدينا من جهة :

	$y\in f\left(f^{-1}(Y)\right)\Rightarrow \exists x\in f^{-1}(Y)/\, y=f(x)\Rightarrow f(x)\in Y\,/\, y=f(x)\Rightarrow y\in Y$ منه : $f\left(f^{-1}(Y)\right)\subset Y$ ، و من جهة أخرى و باستعمال شمول الدالة : $y\in Y\Rightarrow \exists x\in E\ /\ y=f(x)\Rightarrow f(x)\in Y\Rightarrow x\in f^{-1}(Y)\Rightarrow f(x)\in f\left(f^{-1}(Y)\right)\Rightarrow y\in f\left(f^{-1}(Y)\right)$ بالتالي: $Y\subset f\left(f^{-1}(Y)\right)$ خلاصة: $\forall Y\in P(F):\ f\left(f^{-1}(Y)\right)=Y \Leftrightarrow$ شمول f	
	لنبين أن : f تباين $\Rightarrow$ $g\circ f$ تباين ليكن $(x;y)\in E^2$ بحيث: $f(x)=f(y)$ لدينا و باستعمال تباين $g\circ f$: $f(x)=f(y)\Rightarrow g\left(f(x)\right)=g\left(f(y)\right)\Rightarrow g\circ f(x)=g\circ f(y)\Rightarrow x=y$ بالتالي: f تباين	3
	لنبين أن : g شمول $\Rightarrow$ $g\circ f$ شمول ليكن $y\in G$ ، باستعمال شمول $g\circ f$ نستنتج أن : $\exists x\in E\ /\ y=g\circ f(x)=g\left(f(x)\right)$ و بوضع $b=f(x)\in F$ فإننا نستنتج أن: $\exists b\in F\ /\ y=g(b)$ وبالتالي: g شمول	4