

التمرين الأول :

لكنه $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$

أثبت أنه : $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)} - \frac{1}{k}$ لكل n من \mathbb{N}^* وأثبت أنه $U_n < 2$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

التمرين الثاني :

$(U_n)_{n \geq 2}$ متتالية عددية و بحيث : $U_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2 - 1}$

(1) أحسب U_2 ; U_3

(2) أدرس رتبة المتتالية $(U_n)_{n \geq 2}$

(3) تحقق أنه $\frac{1}{k^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right)$ ثم استنتج أنه $(U_n)_{n \geq 2}$ متتالية مكبورة

التمرين الثالث :

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي : $U_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

(1) حد U_1 و U_2 و بينه أنه $U_2 > U_1$

(2) أ- بينه أنه $\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$ لكل عدد k طبيعي غير منعدم

ب- استنتج أنه $(U_n)_{n \geq 1}$ مكبورة بالعدد 2

التمرين الرابع :

نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 3$ و $U_{n+1} = 3 - \frac{9}{4U_n}$

(1) بينه أنه $U_n > \frac{3}{2}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

(2) أدرس رتبة المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$

أ- نضع $V_n = \frac{2}{2U_n - 3}$ أ- بينه أنه $(V_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية

ب- بينه أنه $U_n = \frac{3}{2} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)$

التمرين الخامس :

نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $U_0 = \frac{4}{3}$ و $U_{n+1} = \frac{6U_n - 3}{2U_n + 1}$

1- بينه أنه : $1 < U_n < \frac{3}{2}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) (لاحظ أنه $U_{n+1} = 3 - \frac{6}{2U_n + 1}$)

2- أدرس رتبة المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

3- نضع $V_n = \frac{2U_n - 3}{U_n - 1}$. بينه أنه $(V_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية أحسب U_n بدلالة n

التمرين السادس :

نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $U_0 = \frac{1}{2}$ و $U_{n+1} = \frac{2U_n^2}{1 + U_n^3}$

(1) بينه أنه $0 < U_n \leq \frac{1}{2}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

(2) أدرس رتبة المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$(3) \text{ بيه أنه } U_{n+1} \leq \frac{8}{9}U_n \text{ و استنتج أنه } U_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

التمرين السابع :

$$U_{n+1} = \frac{4n-2}{n+1} + \frac{3n}{n+1}U_n \text{ و } U_1 = 1 \text{ و } (U_n)_{n \geq 1} \text{ متتالية عددية معرفة بما يلي :}$$

$$(1) \text{ بيه أنه } (\forall n \in \mathbb{N}^*) U_n > -2$$

(2) أدرس رتبة المتتالية $(U_n)_{n \geq 1}$

$$(3) \text{ نضع } V_n = n(2+U_n) \text{ أ- بيه أنه } (V_n)_n \text{ متتالية هندسية محدا أساسها و أحسب } U_n \text{ بدلالة } n$$

$$\text{ب- أحسب المجموع } S_n = \sum_{k=1}^{k=n} kU_k$$

التمرين الثامن :

$$\begin{cases} U_0 = 3 & ; & U_1 = 3 \\ U_{n+2} = \frac{4}{3}U_{n+1} - \frac{4}{9}U_n \end{cases} \text{ متتالية عددية معرفة بما يلي : } (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$(1) \text{ أحسب } U_2 ; U_3$$

$$(2) \text{ نضع } V_n = U_{n+1} - \frac{2}{3}U_n \text{ بيه أنه } (V_n)_n \text{ متتالية هندسية و حد أساسها و أحسب } V_n \text{ بدلالة } n$$

$$(3) \text{ استنتج أنه } U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$(4) \text{ نضع } W_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n V_n$$

$$\text{أ- بيه أنه } (W_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ متتالية حسابية محدا أساسها } r$$

$$\text{ب- استنتج أنه } U_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} (n+2)$$

التمرين التاسع :

$$\text{✎ } (U_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ متتالية بحيث } S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1} = \frac{2n^2 + n}{2} \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

$$\text{أحسب } U_0 ; U_1 ; \dots ; U_n \text{ ثم بيه أنه } (U_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ متتالية حسابية و حد } U_n \text{ بدلالة } n$$

$$\text{✎ } \text{لكنه } (U_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ متتالية حسابية أساسها } r \neq 0 \text{ و } U_0 = 4 \text{ و بحيث } U_1 ; U_4 ; U_{12} \text{ حدود متتابعة متتالية هندسية}$$

$$\text{بيه أنه } r = 5 \text{ و أحسب المجموع } U_0 + U_1 + \dots + U_{12} \text{ أو أحسب } U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$$

$$\begin{cases} U_0 + U_1 + U_2 = 15 \\ U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 = 107 \end{cases} \text{ متتالية حسابية أساسها } r \text{ موجب و بحيث : } (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\text{بيه أنه } U_1 = 5 \text{ و استنتج أنه } r = 4 \text{ ثم أحسب المجموع } U_0 + U_1 + \dots + U_n$$

$$\text{☺ } \text{لكنه } (V_n)_n \text{ متتالية هندسية بحيث : } \begin{cases} V_0 V_1 V_2 = 27 \\ V_0 + V_1 + V_2 = 13 \end{cases} \text{ بيه أنه } V_1 = 3 \text{ و استنتج أنه } q = 3 \text{ أو } q = \frac{1}{3}$$

$$\text{أحسب في كل حالة المجموع } V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$$

التمرين العاشر :

$$\text{لكنه } (U_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ متتالية عددية معرفة بما يلي : } U_0 = 1 ; U_{n+1} = 2U_n - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} ; \text{ و نضع } V_n = 2U_n - n$$

$$(1) \text{ أحسب } U_1 \text{ و بيه بالترجع أنه } U_n \geq \frac{n}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$(2) \text{ أدرس رتبة المتتالية } (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$(3) \text{ بيه أنه } (V_n)_n \text{ متتالية هندسية محددًا أساسها}$$

$$(4) \text{ أ- بيه أنه } U_n = 2^n + \frac{1}{2}n$$

$$\text{ب- بيه أنه } U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1} = 2^n - 1 + \frac{n(n-1)}{4}$$

التمرين الثاني عشر :

$$\text{نعتبر المتتالية } (U_n)_n \text{ المعرفة بما يلي : } U_0 = \frac{1}{3} \text{ و } U_{n+1} = \frac{2U_n}{1 + (n+2)U_n}$$

$$(1) \text{ أحسب } U_1$$

$$(2) \text{ نضع } V_n = \frac{1}{U_n} - n$$

$$\text{أ- بيه أنه } (V_n)_n \text{ متتالية هندسية محددًا أساسها}$$

$$\text{ب- أحسب } U_n \text{ بدلالة } n$$

$$(3) \text{ احسب بدلالة } n \text{ المجموع : } T_n = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \dots + \frac{1}{U_n}$$

التمرين الثاني عشر :

$$\text{نعتبر المتتالية } (U_n)_n \text{ المعرفة بما يلي : } U_0 = 0, U_1 = 1 \text{ و } U_{n+2} = \frac{1}{6}U_{n+1} + \frac{1}{6}U_n$$

$$(1) \text{ نضع } W_n = U_{n+1} + \frac{1}{3}U_n \text{ و } V_n = U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n$$

$$\text{أ- بيه أنه } (V_n)_n \text{ متتالية هندسية و أحسب } V_n \text{ بدلالة } n$$

$$\text{ب- بيه أنه } (W_n)_n \text{ متتالية هندسية و أحسب } W_n \text{ بدلالة } n$$

$$(2) \text{ استنتج مما سبق الحد العام } U_n \text{ بدلالة } n$$

التمرين الثالث عشر :

$$\text{نعتبر المتتاليتين } (U_n)_{n \geq 1} \text{ و } (V_n)_{n \geq 1} \text{ المعرفتين بما يلي : } U_n = \sum_{k=1}^{k=2n} \frac{(-1)^k}{k} \text{ و } V_n = \sum_{k=1}^{k=2n+1} \frac{(-1)^k}{k}$$

$$(1) \text{ بيه أنه } (\forall n \in \mathbb{N}^*) V_n < U_n$$

$$(2) \text{ بيه أنه المتتالية } (U_n)_{n \geq 1} \text{ تناقصية و أن المتتالية } (V_n)_{n \geq 1} \text{ تزايدية}$$

التمرين الرابع عشر :

$$\text{لكل } (U_n)_n \text{ متتالية عددية معرفة بما يلي : } U_0 = \frac{1}{2} \text{ و } U_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{3}{2}U_n}$$

$$(1) \text{ أحسب } U_1 \text{ و بيه أنه } 0 < U_n < 2 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$(2) \text{ أدرس رتبة المتتالية } (U_n)_n$$

$$(3) \text{ أ- بيه أنه } (\forall n \in \mathbb{N}) |U_{n+1} - 2| \leq \frac{3}{5}|U_n - 2|$$

$$\text{ب- استنتج أنه } (\forall n \in \mathbb{N}) |U_n - 2| \leq \frac{3}{2} \left(\frac{3}{5}\right)^n$$