السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	المتتاليـــــــــــــــات حلول مقترحة	سلسلة 2

تمرين 1 : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n} \quad ; n \ge 0 \end{cases}$ ، $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$

1

لدينا :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}-3} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{1}{\frac{9}{6-u_n} - 3} - \frac{1}{u_n-3} = \frac{1}{\frac{9-3(6-u_n)}{6-u_n}} - \frac{1}{u_n-3}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{6-u_n}{9-18+3u_n} - \frac{1}{u_n-3} = \frac{6-u_n}{3(-3+u_n)} - \frac{3}{3(u_n-3)} = \frac{6-u_n-3}{3(u_n-3)} = \frac{3-u_n}{3(u_n-3)} = \frac{-1}{3}$$

بالتالي (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = \dfrac{-1}{3}$ و حدها الأول $v_0 = \dfrac{1}{u_0-3} = \dfrac{1}{-4} = \dfrac{-1}{4}$

2

لدينا حسب السؤال السابق : $v_n = v_0 + rn = \dfrac{-1}{4} - \dfrac{1}{3}n = \dfrac{-4n-3}{12}$

لدينا: $v_n = \dfrac{1}{u_n-3}$ منه : $u_n - 3 = \dfrac{1}{v_n}$ منه : $\boxed{u_n = \dfrac{1}{v_n} + 3 = \dfrac{-12}{4n+3} + 3 = \dfrac{-12+12n+9}{4n+3} = \dfrac{12n-3}{4n+3}}$

3

$$\boxed{S = v_0 + v_2 + \ldots + v_{n-1} = \frac{v_0 + v_{n-1}}{2} \times n = \frac{\frac{-1}{4} + \frac{-4(n-1)-3}{12}}{2} \times n = \frac{\frac{-3-4n+4-3}{12}}{2} \times n = \frac{-n(2n+1)}{12}}$$

تمرين 2 : $\begin{cases} u_0 = 1 , u_1 = 4 \\ u_{n+2} = \dfrac{3}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n \quad ; n \ge 0 \end{cases}$ ، $v_n = u_{n+1} - u_n$

1

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n - u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = u_1 - u_0 = 4 - 1 = 3$

2

لدينا $\forall n \in IN \quad v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1} = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \ldots + (u_n - u_{n-1}) = -u_0 + u_n = u_n - u_0$

3

لدينا حسب السؤال السابق : $u_n - u_0 = v_0 + v_1 + \ldots + v_{u-1} = v_0 \times \dfrac{1-q^n}{1-q} = 3\dfrac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 6\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$

إذن : $\boxed{u_n = 6\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right) + u_0 = 6 - \dfrac{6}{2^n} + 1 = 7 - \dfrac{6}{2^n}}$

4

نعتبر المتتالية $w_n = v_n^2$ ، لدينا : $\forall n \in IN \quad w_{n+1} = v_{n+1}^2 = \left(\dfrac{1}{2}v_n\right)^2 = \dfrac{1}{4}v_n^2 = \dfrac{1}{4}w_n$

إذن : $(w_n)_{n\ge 0}$ متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{4}$ و حدها الأول : $w_0 = 9$

منه : $S = v_0^2 + v_1^2 + \ldots + v_n^2 = w_0 + w_1 + \ldots + w_n = w_0 \dfrac{1-\frac{1}{4^{n+1}}}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{36}{3}\left(1 - \dfrac{1}{4^{n+1}}\right) = 12 - \dfrac{3}{4^n}$

لحساب مجموع متتالية غالبا ما نحدد طبيعتها أولا كالسؤال 4 أو قد نستعمل تبسيطا كالسؤال 2.

تمرين 3 : $\begin{cases} u_0=1 \ , \ v_0=7 \\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n+v_n}{3} ; \ v_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2} \ ; \ n\ge 0 \end{cases}$ ، $w_n=v_n-u_n$ ، $t_n=3u_n+2v_n$

1

أ) لدينا : $w_{n+1}=u_{n+1}-v_{n+1}=\dfrac{2u_n+v_n}{3}-\dfrac{u_n+v_n}{2}=\dfrac{4u_n+2v_n-3u_n-3v_n}{6}=\dfrac{u_n-v_n}{6}=\dfrac{w_n}{6}$

إذن $(w_n)_{n\ge 0}$ متتالية هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{6}$ و حدها الأول $w_0=1-7=-6$

ب) $w_n=w_0\,q^n=-6\times\left(\dfrac{1}{6}\right)^n=\dfrac{-1}{6^{n-1}}$

2

أ) لدينا : $t_{n+1}=3u_{n+1}+2v_{n+1}=2u_n+v_n+u_n+v_n=3u_n+2v_n=t_n$ ، بالتالي : $(t_n)_{n\ge 0}$ متتالية ثابتة

ب) بما أن $(t_n)_{n\ge 0}$ متتالية ثابتة: $\forall n\in IN \quad t_n=t_0=3u_0+2v_0=3+14=17$

3

لدينا حسب ما سبق : $\begin{cases} u_n-v_n=w_n \\ 3u_n+2v_n=t_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u_n-2v_n=2w_n \\ 3u_n-3v_n=3w_n \\ 3u_n+2v_n=t_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5u_n=2w_n+t_n \\ 5v_n=t_n-3w_n \end{cases}$

بالتالي:

$$\boxed{\forall n\in IN \quad \begin{cases} u_n=\dfrac{2w_n+t_n}{5}=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{-2}{6^{n-1}}+17\right) \\ v_n=\dfrac{t_n-3w_n}{5}=\dfrac{1}{5}\left(17+\dfrac{3}{6^{n-1}}\right) \end{cases}}$$

يمكنك التحقق من صحة النتيجة بتعويض الصيغ المحصل عليها (يمكنك أيضا حساب بعض القيم الخاصة للتحقق من صحة النتائج مثل u_0 و v_0)

تمرين 4 : $\begin{cases} u_0=1 \ , \ v_0=2 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+2v_n}{3} \ ; \ v_{n+1}=\dfrac{u_n+4v_n}{5} \ ; n\ge 0 \end{cases}$ ، $w_n=v_n-u_n$ ، $t_n=3u_n+10\,v_n$

1

لدينا :

$$w_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=\dfrac{u_n+4v_n}{5}-\dfrac{u_n+2v_n}{3}=\dfrac{3u_n+12v_n-5u_n-10v_n}{15}=\dfrac{2v_n-2u_n}{15}=\dfrac{2(v_n-u_n)}{15}=\dfrac{2}{15}w_{n+1}$$

إذن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q=\dfrac{2}{15}}$ و حدها الأول $\boxed{w_0=v_0-u_0=2-1=1}$

منه : $\boxed{\forall n\in IN \quad w_n=w_0\times q^n=\left(\dfrac{2}{15}\right)^n}$

2

لدينا : $t_{n+1}=3u_{n+1}+10v_{n+1}=u_n+2v_n+2(u_n+4v_n)=u_n+2v_n+2u_n+8v_n=3u_n+10v_n=t_n$

إذن (w_n) متتالية ثابتة، منه : $\boxed{\forall n\in IN \quad t_n=t_0=3u_0+10v_0=3+20=23}$

3

لدينا حسب ما سبق : $\begin{cases} v_n-u_n=w_n \\ 3u_n+10v_n=t_n \end{cases}$ منه : $\begin{cases} v_n=w_n+u_n \\ 3u_n+10(w_n+u_n)=t_n \end{cases}$ منه : $\begin{cases} v_n=w_n+u_n \\ 3u_n+10w_n+10u_n=t_n \end{cases}$

منه : $\begin{cases} v_n=w_n+u_n \\ 13u_n=t_n-10w_n \end{cases}$ منه : $\begin{cases} v_n=w_n+\dfrac{t_n-10w_n}{13} \\ u_n=\dfrac{t_n-10w_n}{13} \end{cases}$ منه : $\begin{cases} v_n=\dfrac{t_n+3w_n}{13}=\dfrac{23+3\left(\dfrac{2}{15}\right)^n}{13} \\ u_n=\dfrac{t_n-10w_n}{13}=\dfrac{23-10\left(\dfrac{2}{15}\right)^n}{13} \end{cases}$

تمرين 5 : $0<a<b$ ، $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \; ; n \geq 0 \end{cases}$ ، $\begin{cases} v_0 = b \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \; ; n \geq 0 \end{cases}$ ، $\forall n \in IN \quad w_n = v_n - u_n$

1		سنستعمل برهانا بالترجع. بالنسبة لـ $n=0$ ، العبارة صحيحة لأن : $u_0 = a$ و $v_0 = b$ و $0<a<b$ نفترض أن : $0<u_n<v_n$ ونبين أن : $0<u_{n+1}<v_{n+1}$ لدينا : $0<u_n<v_n \Rightarrow \begin{cases} 2u_n v_n > 0 \\ u_n + v_n > 0 \end{cases} \Rightarrow u_{n+1} > 0$ و لدينا : $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} - \dfrac{2u_n v_n}{u_n+v_n} = \dfrac{(u_n+v_n)^2 - 4u_nv_n}{2(u_n+v_n)} = \dfrac{u_n^2 + 2u_nv_n + v_n^2 - 4u_nv_n}{2(u_n+v_n)} = \dfrac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)} > 0$ إذن : $v_{n+1} > u_{n+1} > 0$ ، بالتالي : $\forall n \in IN \quad 0<u_n<v_n$
2		لدينا لكل $n \in IN$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n v_n}{u_n+v_n} - u_n = u_n\left(\dfrac{2v_n}{u_n+v_n} - 1\right) = u_n \dfrac{v_n - u_n}{u_n+v_n} > 0$ و $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n+v_n}{2} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{2} < 0$ ، إذن : (u_n) تزايدية قطعا و (v_n) تناقصية قطعا.
3		سنستعمل برهانا بالترجع. بالنسبة لـ $n=0$ ، العبارة صحيحة لأن : $u_0 v_0 = ab$. نفترض أن : $u_n v_n = ab$ ، لدينا: $u_{n+1} v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n+v_n} \times \dfrac{u_n+v_n}{2} = u_n v_n = ab$ ، بالتالي : $\forall n \in IN \quad u_n v_n = ab$
4		لدينا لكل $n \in IN$: $0<u_n<v_n \Rightarrow \begin{cases} 0<u_n^2<v_n u_n \\ 0<u_n v_n < v_n^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<u_n^2<ab \\ 0<ab<v_n^2 \end{cases} \Rightarrow u_n < \sqrt{ab} < v_n$
5	أ)	لدينا حسب السؤال 1 ، $v_n > u_n$ ، إذن : $w_n = v_n - u_n > 0$ $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{(v_n-u_n)^2}{2(u_n+v_n)} = \dfrac{(v_n-u_n)}{2} \times \dfrac{v_n-u_n}{u_n+v_n} = \dfrac{w_n}{2}\left(\dfrac{v_n+u_n-2u_n}{u_n+v_n}\right) = \dfrac{w_n}{2}\left(1-2\dfrac{u_n}{u_n+v_n}\right) < \dfrac{w_n}{2}$ بالتالي : $\forall n \in IN \quad 0<w_{n+1}<\dfrac{1}{2}w_n$
	ب)	لدينا حسب السؤال السابق لكل $n \in IN$: $\begin{cases} 0<w_1<\dfrac{1}{2}w_0 \\ 0<w_2<\dfrac{1}{2}w_1 \\ .... \\ 0<w_n<\dfrac{1}{2}w_{n-1} \end{cases}$ بضرب هذه المتفاوتات طرفا بطرف و بعد الاختزال نجد: $0<w_n \leq w_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ أي $0<w_n \leq (b-a)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

6

بأخذ $a=1$ و $b=2$ نستنتج أن : $\forall n \in IN \;\; u_n < \sqrt{2} < v_n$ و $0 < w_n \le \frac{1}{2^{n-1}}$

لكي تكون u_n قيمة مقربة بتفريط و v_n قيمة مقربة بإفراط للعدد $\sqrt{2}$ إلى 10^{-4}، يجب أن يكون $v_n - u_n = w_n \le 10^{-4}$

ولتحقق ذلك يكفي أن يكون: $\frac{1}{2^{n-1}} \le 10^{-4}$ أي $2^{n-1} \ge 10000$ أي $2^n \ge 20000$

وباستعمال آلة حاسبة وحساب قيم 2^n من أجل قيم صحيحة طبيعية (1، 2،...)سنجد أنه يكفي أن يكون $n \ge 15$

- في السؤال 3 يمكن إثبات أن المتتالية $x_n = u_n v_n$ ثابتة ثم الاستنتاج.
- في السؤال 5ـ ب يمكن استعمال برهان بالترجع
- في السؤال الأخير إيجاد قيم العدد n يمكنه إيجاده باستعمال دالة اللوغاريتم النبيري أو اللوغاريتمي (التي تدرس في السنة الثانية بكالوريا) كما يلي $2^n \ge 20000$ تكافئ $\log_{10}\left(2^{n-1}\right) \ge \log_{10}(10000)$ تكافئ $(n-1)\log_{10}(2) \ge 4$ تكافئ $n \ge \frac{4}{\log_{10}(2)}+1$ ، و باستعمال آلة حاسبة نجد: $\frac{4}{\log_{10}(2)}+1 \approx 14,2$ وهذا يعني أن $n \ge 15$