

سلسلة 1	عموميات حول الدوال العددية حلول مقترحة	السنة 1 بكالوريا علوم رياضية
تمرين 1 : لنحدد مجموعة تعريف الدوال التالية :		
$Df = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 4x + 4 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / (x+2)^2 \neq 0\}$ $Df = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \neq 0\} =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$	$f(x) = \frac{4 x +3}{x^2+4x+4}$	
$Dg = \{x \in \mathbb{R} / 2 x-3 -8 \neq 0\}$ $Dg = \{x \in \mathbb{R} / x-3 \neq 4\} = \{x \in \mathbb{R} / x-3 \neq 4 \text{ et } x-3 \neq -4\}$ $Dg = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 7 \text{ et } x \neq -1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; 7[\cup]7; +\infty[$	$g(x) = \frac{x^3-5}{2 x-3 -8}$	
$Dh = \left\{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } x - \frac{1}{x} \neq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } \frac{x^2-1}{x} \neq 0\right\}$ $Dh = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } (x-1)(x+1) \neq 0\}$ $Dh = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } x \neq -1 \text{ et } x \neq 1\}$ $Dh =]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$	$h(x) = \frac{6+x^4}{x - \frac{1}{x}}$	
$Dp = \{x \in \mathbb{R} / x +7 \neq 0\} = \mathbb{R}$ (بما أن : $\forall x \in \mathbb{R} / x +7 \geq 7 > 0$)	$p(x) = \frac{5- x }{ x +7}$	
$Dq = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 6 \neq 0\}$ $\Delta = 1+24 = 25 \Rightarrow x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$ ولدينا : $Dq =]-\infty; -3[\cup]-3; 2[\cup]2; +\infty[$ إذن :	$q(x) = \frac{(5-x)(2-x)}{x^2+x-6}$	
$Dk = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x + 4 \neq 0\}$ $Dk = \mathbb{R}$: إذن $\Delta = 9-16 = -7 < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} x^2 - 3x + 4 > 0$ ولدينا :	$k(x) = \frac{5- x }{x^2-3x+4}$	
$Dt = \{x \in \mathbb{R} / 2 \sin(x) - 1 \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} / \sin(x) \neq \frac{1}{2}\right\} =$ $Dt = \left\{x \in \mathbb{R} / \sin(x) \neq \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\}$ $Dt = \left\{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ et } x \neq \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$ $Dt = \left\{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ et } x \neq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$ $Dt = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$	$t(x) = \frac{5-\sin(x)}{2 \sin(x) - 1}$	
$Dm = \{x \in \mathbb{R} / 3 - x-4 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x-4 \leq 3\} = \{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x-4 \leq 3\}$ $Dm = \{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x \leq 7\} = [1; 7]$	$m(x) = \sqrt{3- x-4 }$	
$Dr = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \text{ et } x^2 + x - 2 \geq 0\}$ $\Delta = 1+8 = 9 > 0$: لدينا $x_1 = 1$ و $x_2 = -2$ منه : $(x^2 + x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[)$ منه : $Dr = [0; +\infty[\cap]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[=]1; +\infty[$ بالتالي :	$r(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$	
<p style="text-align: right;">🌱 لحل المتراجحة الثانية قمنا بتحديد جذور الحدودية $x^2 + x - 2$ وبعد استعمال جدول الإشارات وجدنا المجموعة: $]1; +\infty[$ ، ولكون شرط صلاحية التعبير يتضمن العطف "و" فلنتيجة النهائية عبارة عن تقاطع مجالين.</p>		

$$Dl = \{x \in \mathbb{R} / x^3 - 8 \geq 0 \text{ et } |x+1| - |x-7| \neq 0\}$$

$$Dl = \{x \in \mathbb{R} / x^3 \geq 8 \text{ et } |x+1| \neq |x-7|\}$$

$$Dl = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 2 \text{ et } x+1 \neq x-7 \text{ et } x+1 \neq -x+7\}$$

$$Dl = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 2 \text{ et } 1 \neq -7 \text{ et } x \neq 3\}$$

$$Dl = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 2 \text{ et } x \neq 3\} = [2; 3[\cup]3; +\infty[$$

$$l(x) = \sqrt{x^3 - 8} + \frac{1-x}{|x+1| - |x-7|}$$

تذكر الخاصية: $x^n \geq y^n \Leftrightarrow x \geq y$ حيث n عدد صحيح طبيعي فردي، أما إذا كان n زوجياً فالتكافؤ السابق غير صحيح إلا إذا كان x و y موجبان.

تمرين 2: ادرس زوجية الدوال التالية:

لدينا: $Df = \{x \in \mathbb{R} / |x| + 5 \neq 0\} = \mathbb{R}$ (لأن: $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| + 5 \geq 5 > 0$)
منه: $x \in Df \Rightarrow -x \in Df$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = \frac{(-x)^3}{|-x| + 5} = \frac{-x^3}{|x| + 5} = -f(x) \text{ لدينا، أخرى، لدينا:}$$

بالتالي: f دالة فردية.

$$f(x) = \frac{x^3}{|x| + 5}$$

لدينا: $Dg = \{x \in \mathbb{R} / x^4 + x^2 + 1 \neq 0\} = \mathbb{R}$ (لأن: $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^4 + x^2 + 1 \geq 1 > 0$)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(-x) = \frac{\cos(-x)}{(-x)^4 + (-x)^2 + 1} = \frac{\cos(x)}{x^4 + x^2 + 1} = g(x) \text{ لدينا، أخرى، لدينا:}$$

بالتالي: g دالة زوجية.

$$g(x) = \frac{\cos(x)}{x^4 + x^2 + 1}$$

$$Dh = \{x \in \mathbb{R} / x^3 \neq 1\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$

بما أن: $-1 \in Dh$ و $1 \notin Dh$ فإن h ليست دالة زوجية و لا فردية.

$$h(x) = \frac{\sin(x)}{x^3 - 1}$$

عدم صحة الشرط $x \in Dh \Rightarrow -x \notin Dh$ ينفي مباشرة زوجية وفردية الدالة.

$$Dp = \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad p(-x) = |-x| + |-x+1| + |-x-1| = |x| + |x-1| + |x+1| = p(x)$$

بالتالي p دالة زوجية.

$$p(x) = |x| + |x+1| + |x-1|$$

$$Dq = \mathbb{R}$$

لدينا: $q(1) = 3$ و $q(-1) = 1$ منه: $q(-1) \neq q(1)$ و $q(-1) \neq -q(1)$

بالتالي فإن q ليست دالة زوجية و لا فردية.

$$q(x) = x^2 + x + 1$$

إتبات عدم زوجية دالة يجب أن يكون باستعمال مثال مضاد، حيث أن نفي العبارة:

$\exists x \in Dq \quad q(-x) \neq q(x)$ هو $\forall x \in Dq \quad q(-x) = q(x)$ وهو ما يعني إيجاد مثال يحقق هذه العبارة الأخيرة ونفس الشيء بالنسبة لنفي الفردية.

$$Dk = \{x \in \mathbb{R} / x^4 - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / (x-1)(x+1)(x^2+1) \neq 0\}$$

$$Dk =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$$

منه: $x \in Dk \Rightarrow -x \in Dk$ و $k(-x) = k(x) \forall x \in \mathbb{R}$

بالتالي فإن q دالة زوجية.

$$k(x) = \frac{\sqrt{|x-2|} + \sqrt{|x+2|}}{x^4 - 1}$$

$$f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 3}{x^2 + 2x + 2} \text{ : تمرين 3}$$

$$1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0 \text{ لدينا:}$$

$$2 \quad Df = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 2x + 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \text{ (لأن الشرط } x^2 + 2x + 2 \neq 0 \text{ محقق لكل عدد حقيقي حسب السؤال السابق)}$$

$$3 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - 1 = \frac{2x^2 + 4x + 3}{x^2 + 2x + 2} - 1 = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2} = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 2x + 2} \geq 0 \text{ لدينا:}$$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 \leq f(x) < 2$ بالتالي ، $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - 2 = \frac{2x^2 + 4x + 3}{x^2 + 2x + 2} - 2 = \frac{-1}{x^2 + 2x + 2} < 0$ و

تمرين اعتيادي و بسيط بالنسبة لشعبة العلوم الرياضية، لكنه من بين التمارين المدرجة للتذكير ببعض القواعد

تمرين 4 :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$			

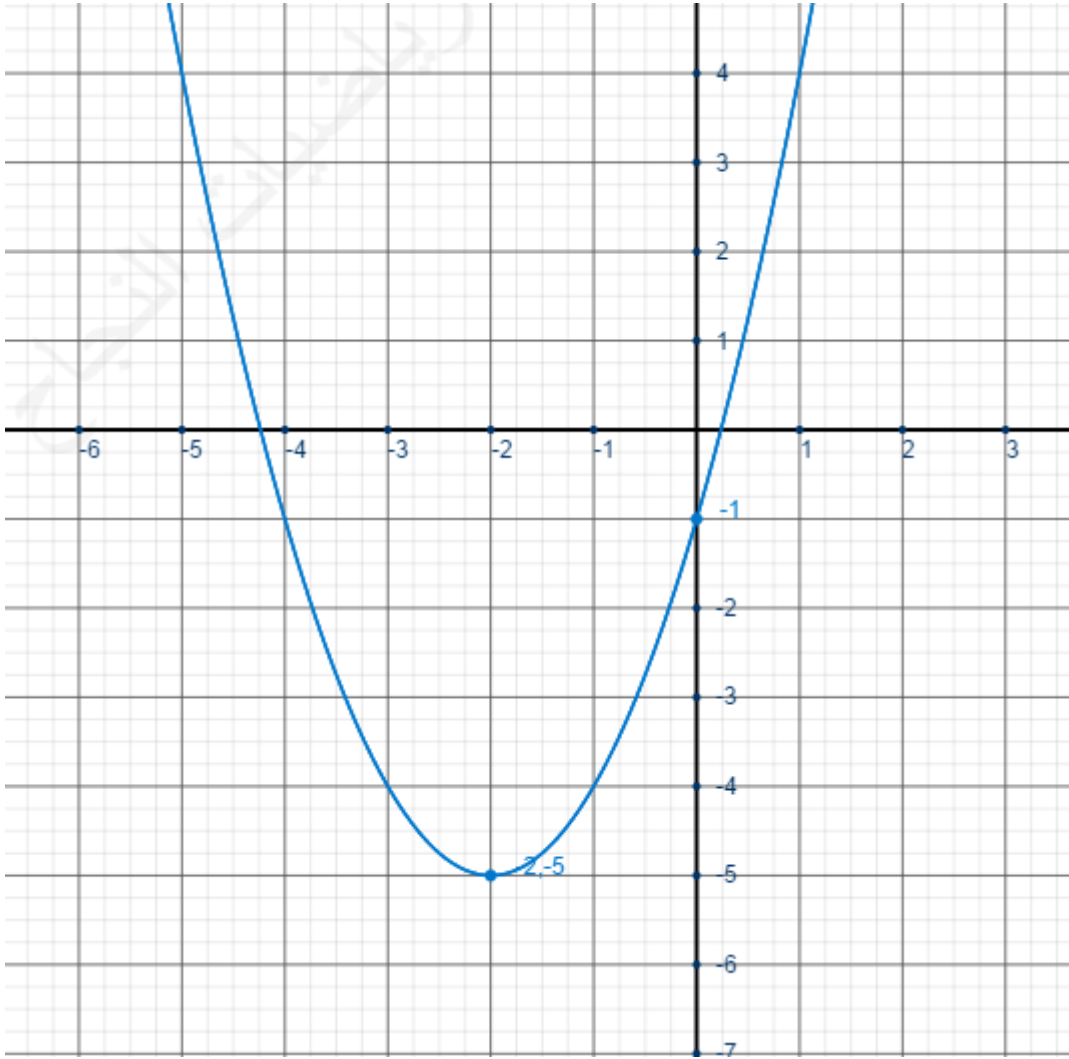
f عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية، إذن تمثيلها المبياني

عبارة عن شلجم رأسه :

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$f(x) = x^2 + 4x - 1$$

إذن :



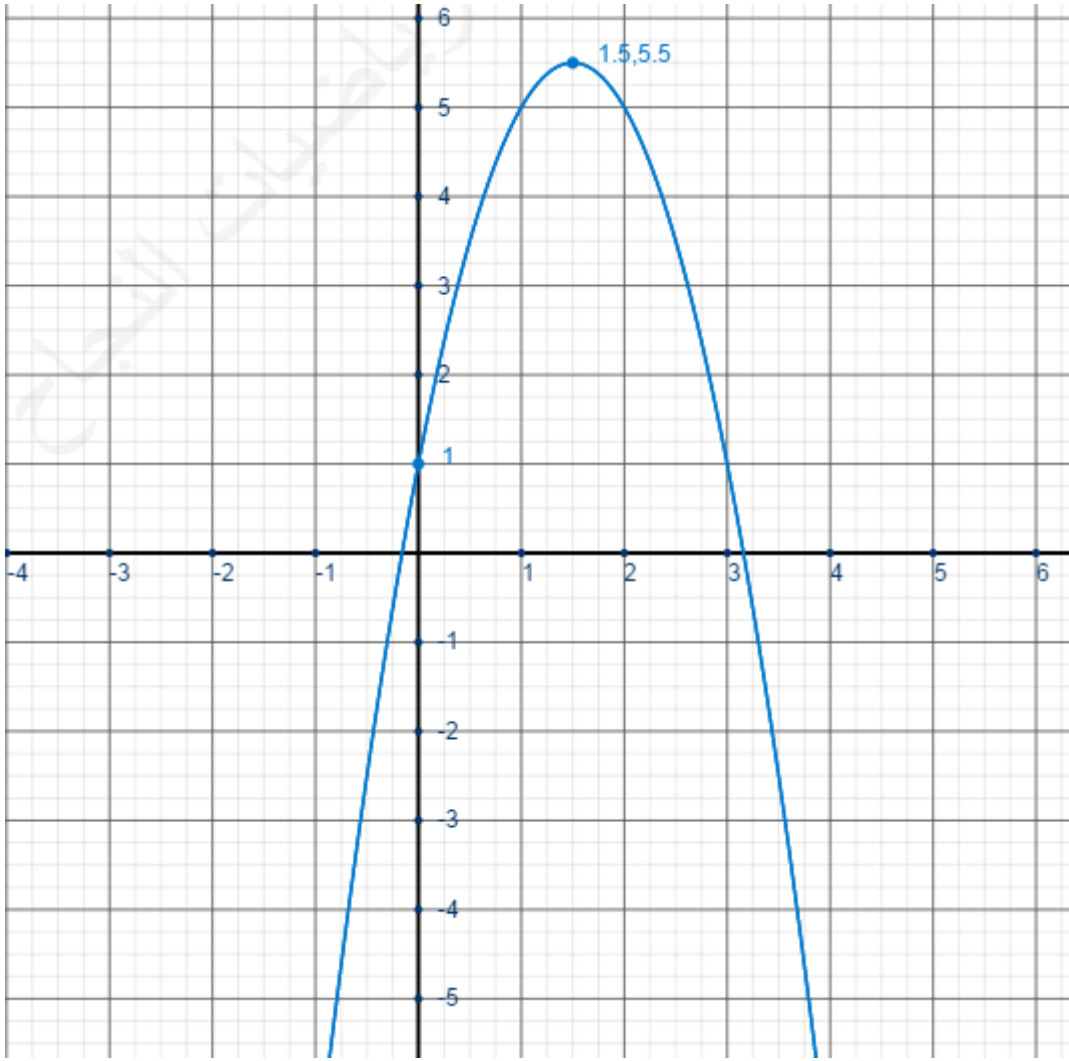
x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$g(x)$			

g عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن

$$\text{شلجم رأسه : } \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

$$g(x) = -2x^2 + 6x + 1$$

إذن :



لاحظ أن رقابة الدالة تعتمد على إشارة المعامل a

h عبارة عن دالة على شكل

إذن تمثيلها المبياني عبارة عن $\frac{ax+b}{cx+d}$ هذلول:

$$h(x) - 3 = \frac{3x-1}{x-2} - 3$$

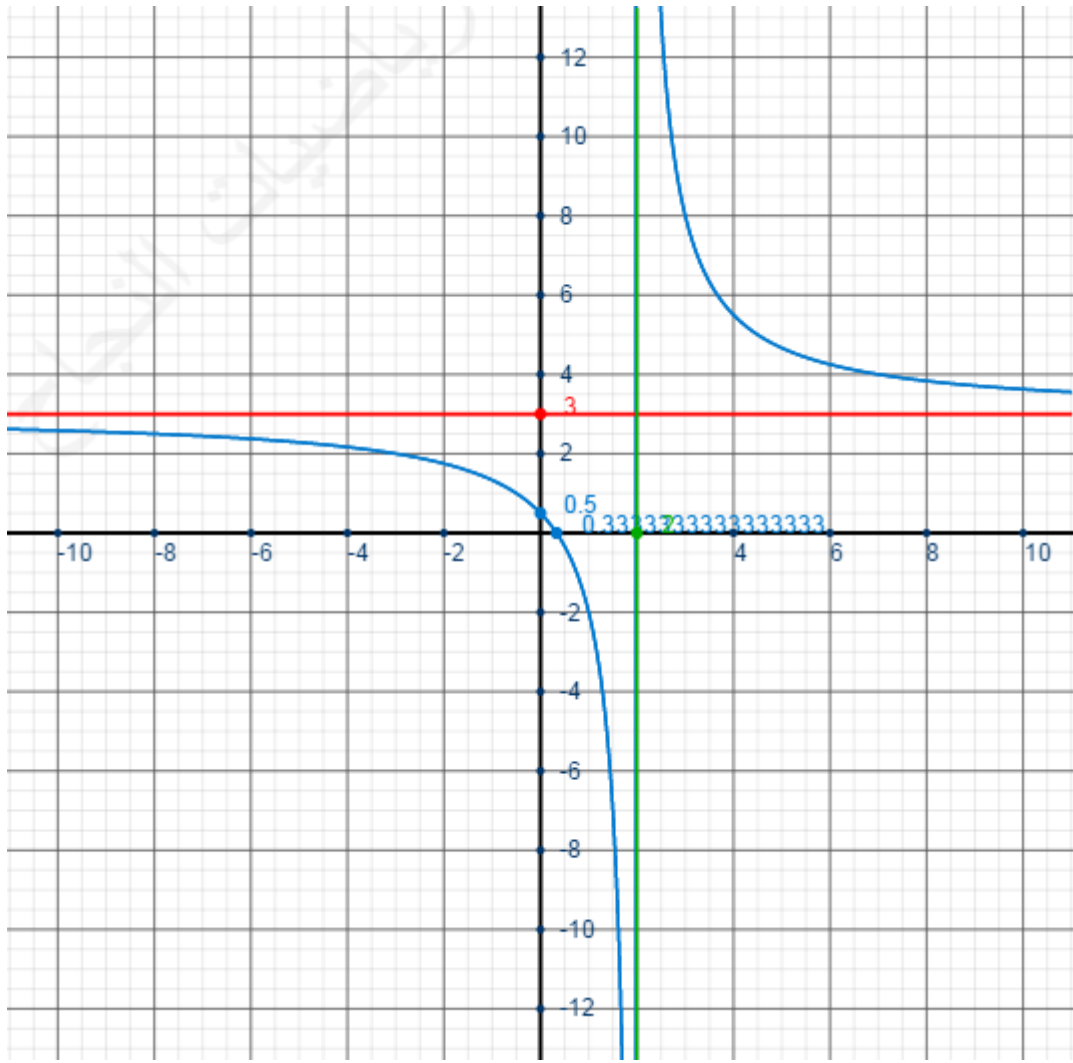
$$h(x) - 3 = \frac{3x-1-3x+6}{x-2} \quad \text{ولدينا:}$$

$$h(x) - 3 = \frac{5}{x-2}$$

إذن الهذلول مركزه: $\Omega(2,3)$ وبما أن $5 > 0$ فالدالة تناقصية

$$h(x) = \frac{3x-1}{x-2}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$	
$h(x)$	↘		↘	



x	$-\infty$	-2	$+\infty$	
$k(x)$	↗		↗	

k عبارة عن دالة على شكل
 إذن تمثيلها المبياني عبارة
 عن هذلول:

$$k(x) - 1 = \frac{x}{x+2} - 1$$

$$k(x) - 1 = \frac{x - x - 2}{x+2} \quad \text{ولدينا:}$$

$$k(x) - 1 = \frac{-2}{x+2}$$

إذن الهذلول مركزه: $\Omega(-2, 1)$ وبما
 أن $-2 < 0$ فالدالة تزايدية

$$k(x) = \frac{x}{x+2}$$

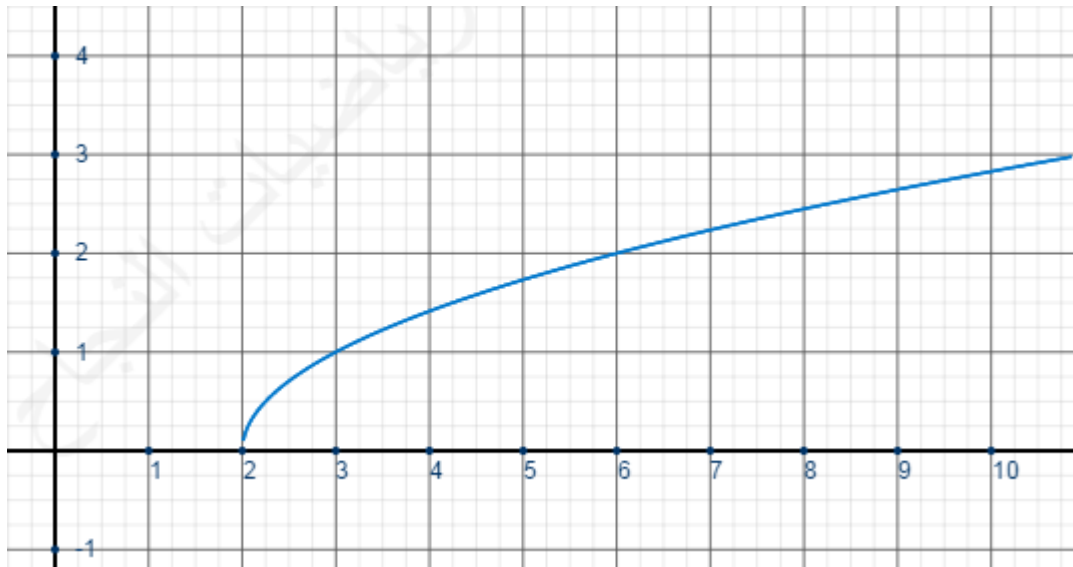


لاحظ أنه لتحديد مركز الهدلول نحسب الفرق $\frac{ax+b}{cx+d} - \frac{a}{c}$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$p(x)$			0

p عبارة عن دالة على شكل
إذن: $\sqrt{x+a}$

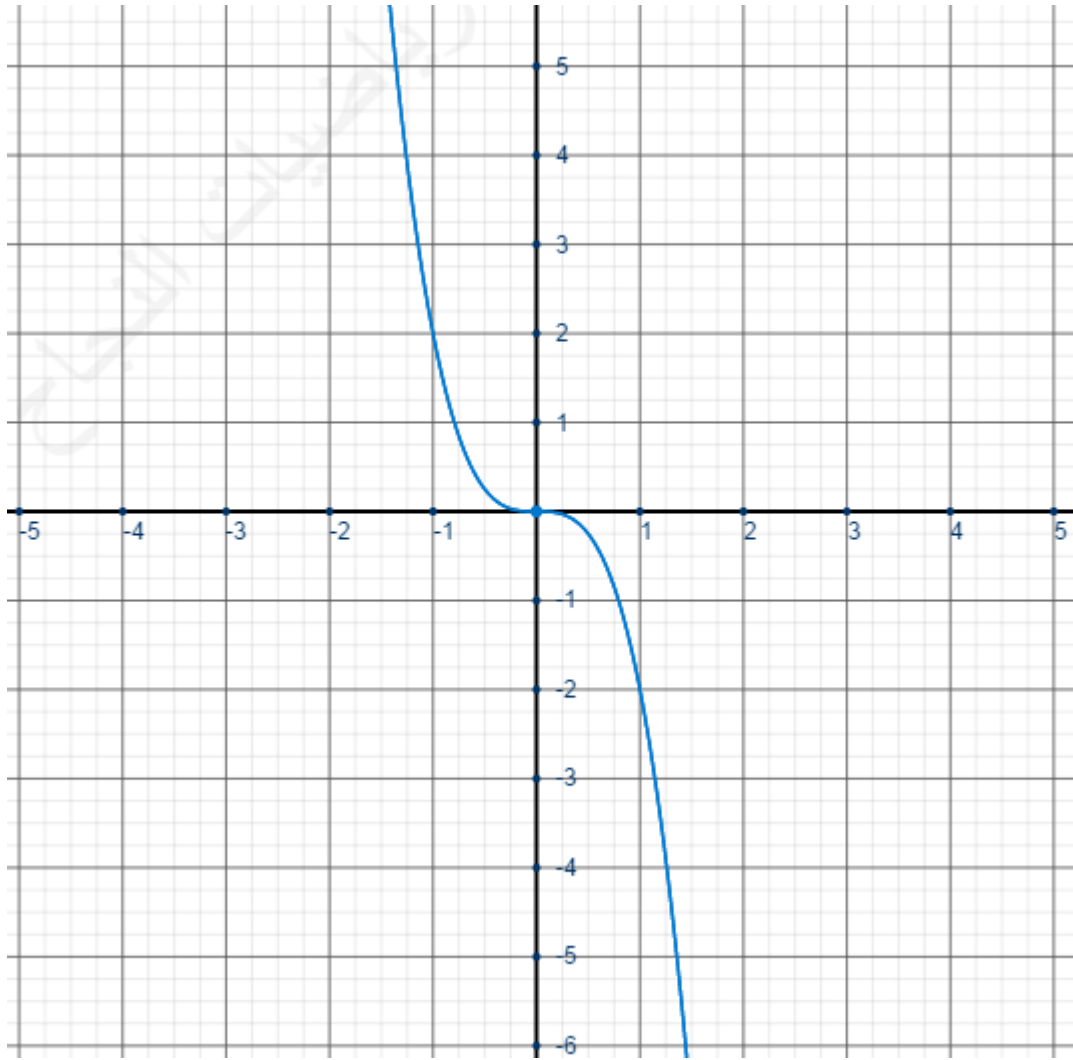
$$p(x) = \sqrt{x-2}$$



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

عبارة عن دالة على شكل ax^3 و بما أن $a = -2 < 0$ ، فإن :

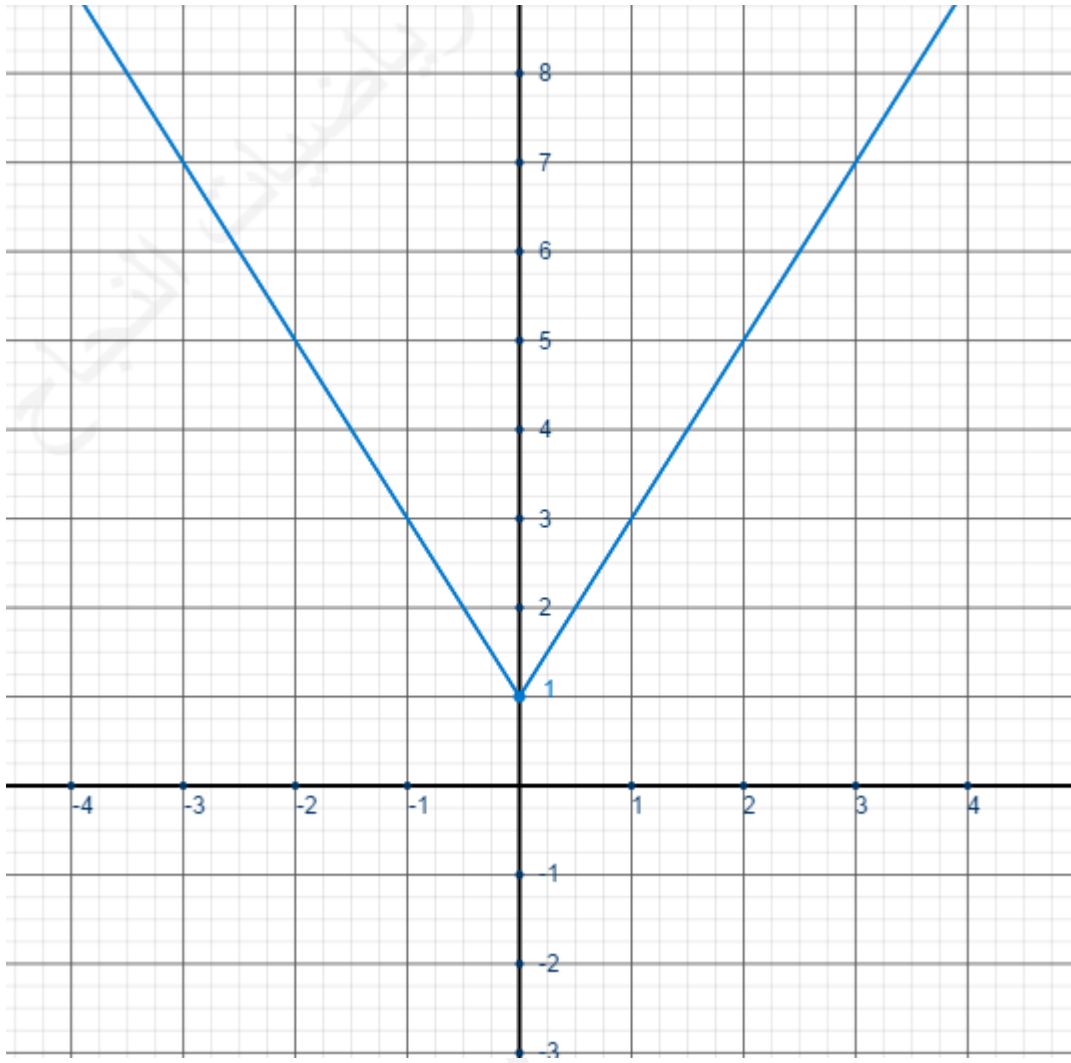
$$q(x) = -2x^3$$



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$m(x)$			

نبين بسهولة أن m دالة زوجية و
 أن قصورها على $[0; +\infty[$ هو
 $(\forall x \in [0; +\infty[m(x) = 2x + 1)$
 دالة تآلفية أي تمثيلها المباني على
 هذا المجال سيكون نصف
 مستقيم، وباستعمال الزوجية نجد:

$$m(x) = 2|x| + 1$$



🍀 للتذكير نحتاج بالطبع لحساب صورة عددين (في الشكل أعلاه: $m(1)=3$ و $m(0)=1$)

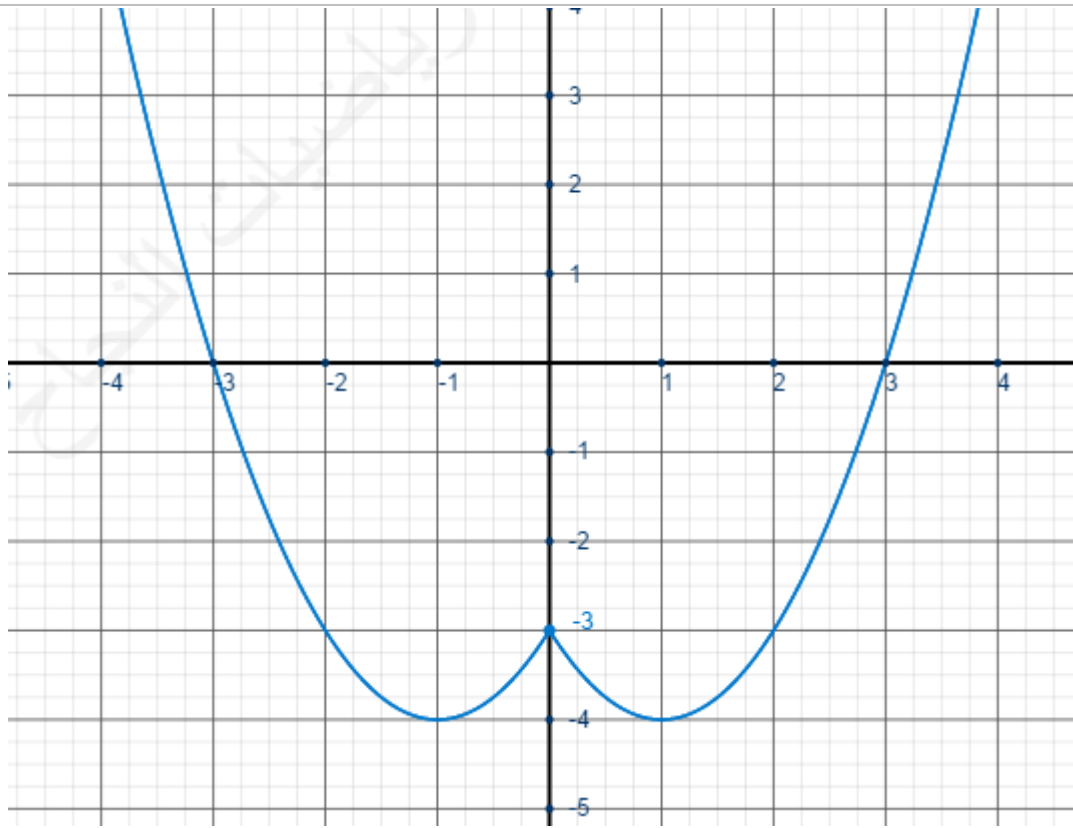
نبين بسهولة أن دالة زوجية وأن قصورها على $[0; +\infty[$

($\forall x \in [0; +\infty[$ $t(x) = x^2 - 2x - 3$) هودالة حدودية من الدرجة الثانية أي تمثيلها

المبياني على هذا المجال سيكون جزءا من شلجم، وباستعمال الزوجية نجد:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$t(x)$		-4	-3	-4	

$$t(x) = x^2 - 2|x| - 3$$



إذا كانت دالة ما زوجية أو فردية فيكفي دراستها على $[0; +\infty[$ لاستنتاج منحناها على كل المجموعة IR

نبين بسهولة أن r دالة فردية وأن قصورها على $[0; +\infty[$

هو خارج حدانيتين أي أن تمثيلها المباني على هذا المجال $(\forall x \in [0; +\infty[r(x) = \frac{3x}{x+1})$

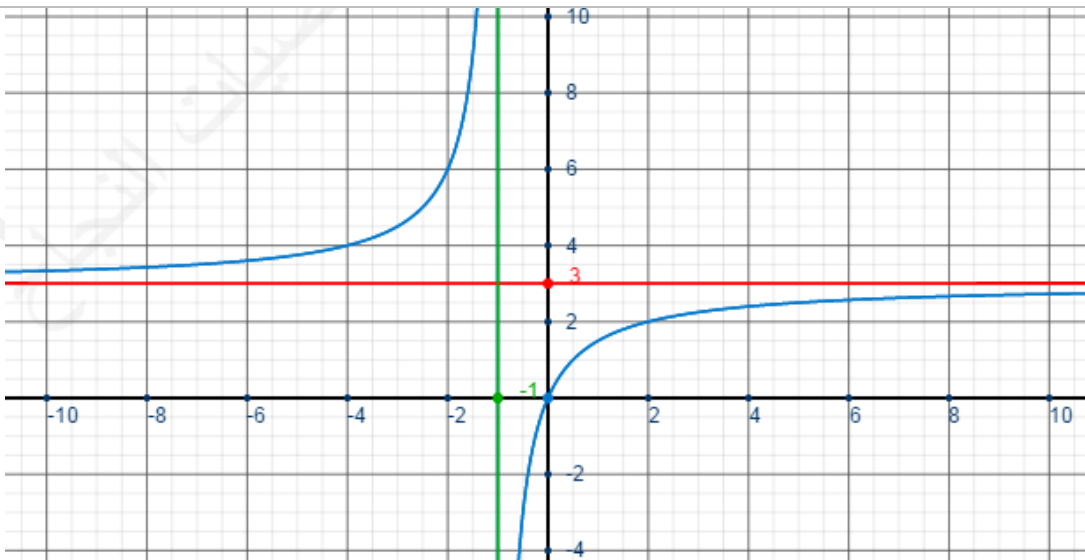
سيكون جزءا من هذلول وباستعمال الزوجية نجد: (بعد إنجاز جدول التغيرات الدالة

$x \mapsto \frac{3x}{x+1}$ نحفظ بالجزء الذي يتضمن المجال $[0; +\infty[$ ولكون الدالة فردية

سيكون لها نفس الرقابة على $]-\infty; 0[$

$$r(x) = \frac{3x}{|x|+1}$$

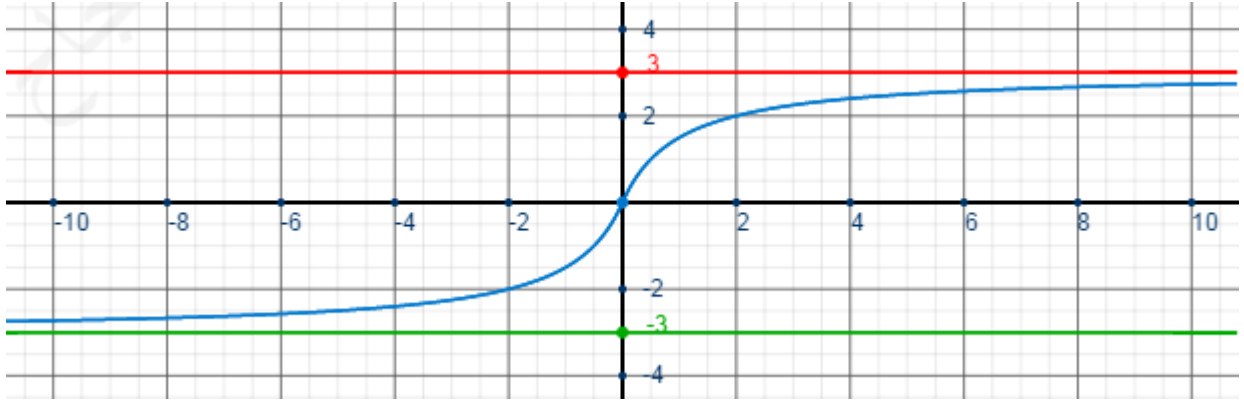
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$r(x)$			



التمثيل المباني

للدالة $x \mapsto \frac{3x}{x+1}$

التمثيل المبياني للدالة $r(x)$



تم إدراج التمثيل المبياني للدالة $x \mapsto \frac{3x}{x+1}$ فقط لأجل توضيح طريقة إنشاء التمثيل المبياني للدالة $r(x)$

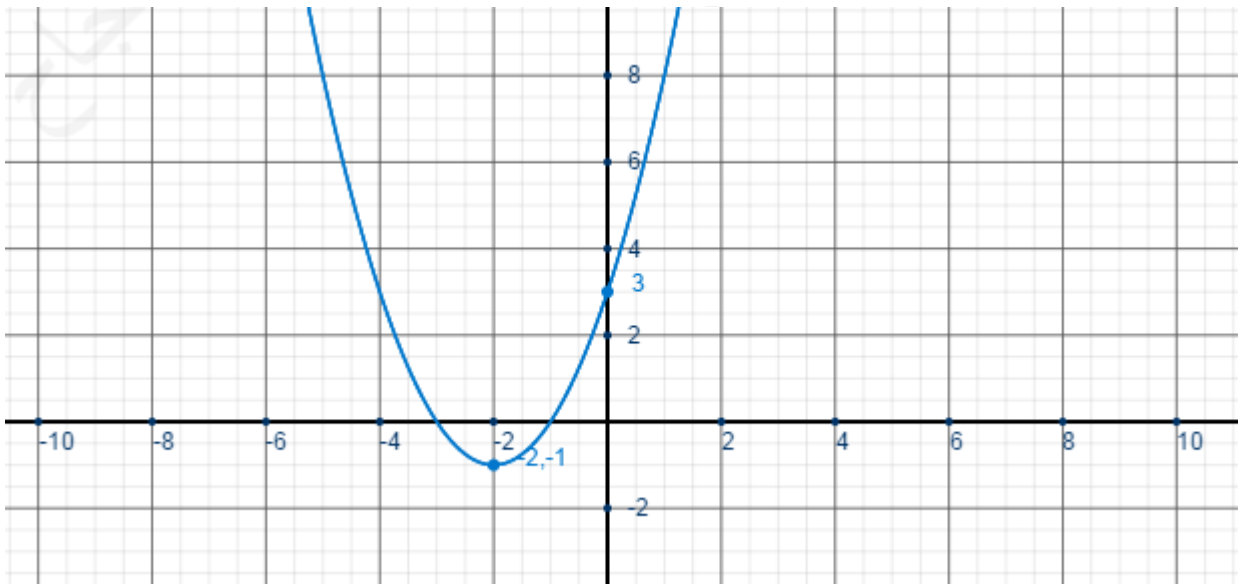
تمرين 5: $f(x) = x^2 + 4x + 3$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$			

f عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية، إذن

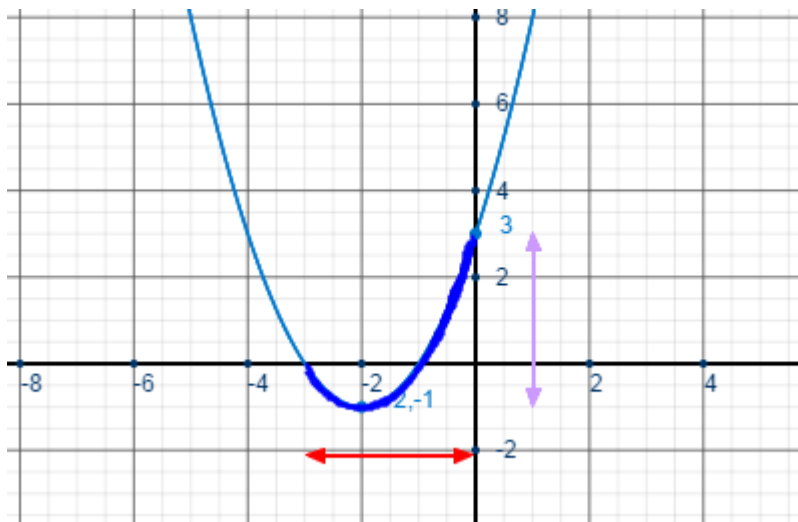
جدول تغيراتها $(\frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2)$

1



2

مبيانيا نجد: $f([-3, 0]) = [-1; 3]$



3

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 + 4x + 4 - 1 = (x+2)^2 - 1 \quad \text{لدينا } \text{أ}$$

$$x \in [-3, 0] \Rightarrow -3 \leq x \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x+2 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq (x+2)^2 \leq 4 \Rightarrow -1 \leq (x+2)^2 - 1 \leq 3$$

$$x \in [-3, 0] \Rightarrow f(x) \in [-1; 3]$$

$$f([-3, 0]) \subset [-1; 3] \quad \text{إذن}$$

$$\exists x \in [-3; 0] / f(x) = y \quad \text{ولنبين } y \in [-1; 3] \quad \text{عكسيا: ليكن}$$

$$f(x) = y \quad \text{من أجل ذلك نحل المعادلة:}$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = (x+2)^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 = y+1$$

$$\Leftrightarrow x+2 = \sqrt{y+1} \text{ ou } x+2 = -\sqrt{y+1} \quad (\text{car } y+1 \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{y+1} - 2 \text{ ou } x = -\sqrt{y+1} - 2$$

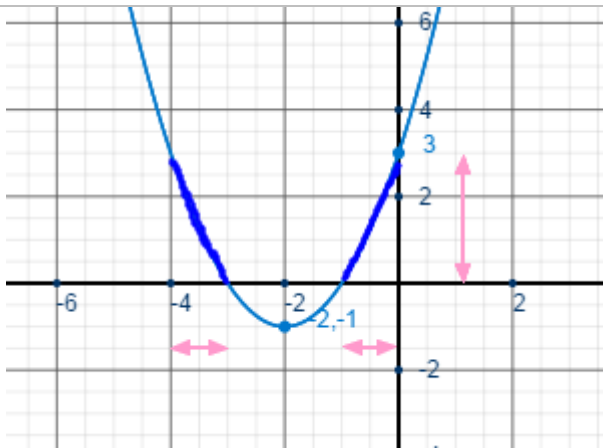
$$y \in [-1; 3] \Rightarrow -1 \leq y \leq 3 \Rightarrow 0 \leq y+1 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{y+1} \leq 2 \Rightarrow -2 \leq \sqrt{y+1} - 2 \leq 0$$

$$y \in [-1; 3] \Rightarrow \sqrt{y+1} - 2 \in [-2; 0] \Rightarrow \sqrt{y+1} - 2 \in [-3; 0]$$

وبما أن :

إذن المعادلة $f(x) = y$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[-1; 3]$

$$f([-3, 0]) = [-1; 3] \quad \text{بالتالي:}$$



$$f^{-1}([0, 3]) = [-4; -3] \cup [-1; 0] \quad \text{مبيانيا نجد:} \quad 5$$

$$x \in f^{-1}([0, 3]) \Leftrightarrow f(x) \in [0, 3] \Leftrightarrow 0 \leq (x+2)^2 - 1 \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq (x+2)^2 \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq |x+2| \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x+2 \leq 2 \\ x+2 \geq 1 \text{ ou } x+2 \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 0 \\ x \geq -1 \text{ ou } x \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow (-4 \leq x \leq -3 \text{ ou } -1 \leq x \leq 0)$$

$$f^{-1}([0, 3]) = [-4; -3] \cup [-1; 0] \quad \text{منه:} \quad 6$$