السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	عموميات حول الدوال العددية حلول مقترحة	سلسلة 2

تمرين 1 : $f(x)=\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}$

1

لدينا : $Df=\{x\in IR\ /\ x\neq 0\}=IR^*$ ، منه : $x\in Df \Rightarrow x\neq 0 \Rightarrow -x\neq 0 \Rightarrow -x\in Df$

و من جهة أخرى : $f(-x)=-\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{-x}=\dfrac{-x}{3}+\dfrac{-3}{x}=-f(x) \qquad \forall x\in Df$

بالتالي : f دالة فردية.

2

أ) ليكن x و y من $]0;+\infty[$ حيث $x\neq y$ ، لدينا :

$$\mathrm{T}(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{\frac{x}{3}+\frac{3}{x}-\frac{y}{3}-\frac{3}{y}}{x-y}=\frac{\frac{x-y}{3}+\frac{3y-3x}{xy}}{x-y}=\frac{(x-y)\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{xy}\right)}{x-y}=\frac{1}{3}-\frac{3}{xy}=\frac{xy-9}{3xy}$$

ب) ليكن : x و y من $]0;3]$ حيث $x\neq y$:

لدينا : $\begin{cases}x\in\,]0;3]\\ y\in\,]0;3]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x\leq 3\\ 0<y\leq 3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}xy>0\\ 0<xy\leq 9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}xy>0\\ xy-9\leq 0\end{cases}\Rightarrow \mathrm{T}(x,y)\leq 0$

ليكن : x و y من $[3,+\infty[$ حيث $x\neq y$:

لدينا : $\begin{cases}x\in[3,+\infty[\\ y\in[3,+\infty[\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq 3\\ y\geq 3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}xy>0\\ xy\geq 9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}xy>0\\ xy-9\geq 0\end{cases}\Rightarrow \mathrm{T}(x,y)\geq 0$

إذن : f تناقصية على $]0;3]$ و تزايدية على $[3,+\infty[$

ج) حسب السؤال السابق و باستعمال فردية الدالة نستنتج أن :

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f(x)$		↗	-2	↘	‖	↘	2	↗	

3

حسب جدول التغيرات نستنتج أن القيمة الدنوية للدالة f على $]0;+\infty[$ هي $2=f(3)$ و القيمة القصوى على $]-\infty;0[$ هي $f(-3)=-2$

تمرين 2 : $f(x)=x^3+3x^2+3x+5$

1

ليكن x و y من IR حيث $x\neq y$ ، لدينا :

$$f(x)-f(y)=(x^3+3x^2+3x+5)-(y^3+3y^2+3y+5)=(x^3-y^3)+3(x^2-y^2)+3(x-y)$$
$$=(x-y)(x^2+xy+y^2)+3(x-y)(x+y)+3(x-y)$$
$$f(x)-f(y)=(x-y)(x^2+xy+y^2+3(x+y)+3)$$

منه : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=x^2+xy+y^2+3x+3y+3$

من جهة أخرى ، لدينا :

$$\left(x+\frac{y+3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(y+1)^2=x^2+x(y+3)+\frac{(y+3)^2}{4}+\frac{3}{4}\left(y^2+2y+1\right)$$

$$=x^2+xy+3x+\frac{y^2+6y+9+3y^2+6y+3}{4}$$

$$=x^2+x\,y+3x+\frac{4y^2+12y+12}{4}$$

$$\left(x+\frac{y+3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(y+1)^2=x^2+x\,y+3x+y^2+3y+3$$

بالتالي : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=\left(x+\dfrac{y+3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}(y+1)^2$

2 بما أن معدل تغير عددين حقيقيقن مختلفين دائما موجب فإن الدالة تزايدية على IR

تمرين 3 : نعتبر الدالتين $f(x)=x^2-1$ و $g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

1 f عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية

إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه :

$\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{0}{2}=0$ ، وبما أن $a=1>0$ فإن :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	-1	↗

g عبارة عن دالة على شكل $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ، إذن

تمثيلها المبياني عبارة عن هذلول مركزه :

$\Omega(1,1)$ وبما أن $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2<0$ فالدالة تناقصية

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	↘	‖	↘

للتذكير مركز الهذلول هو : $\Omega\left(\dfrac{-d}{c},\dfrac{a}{c}\right)$

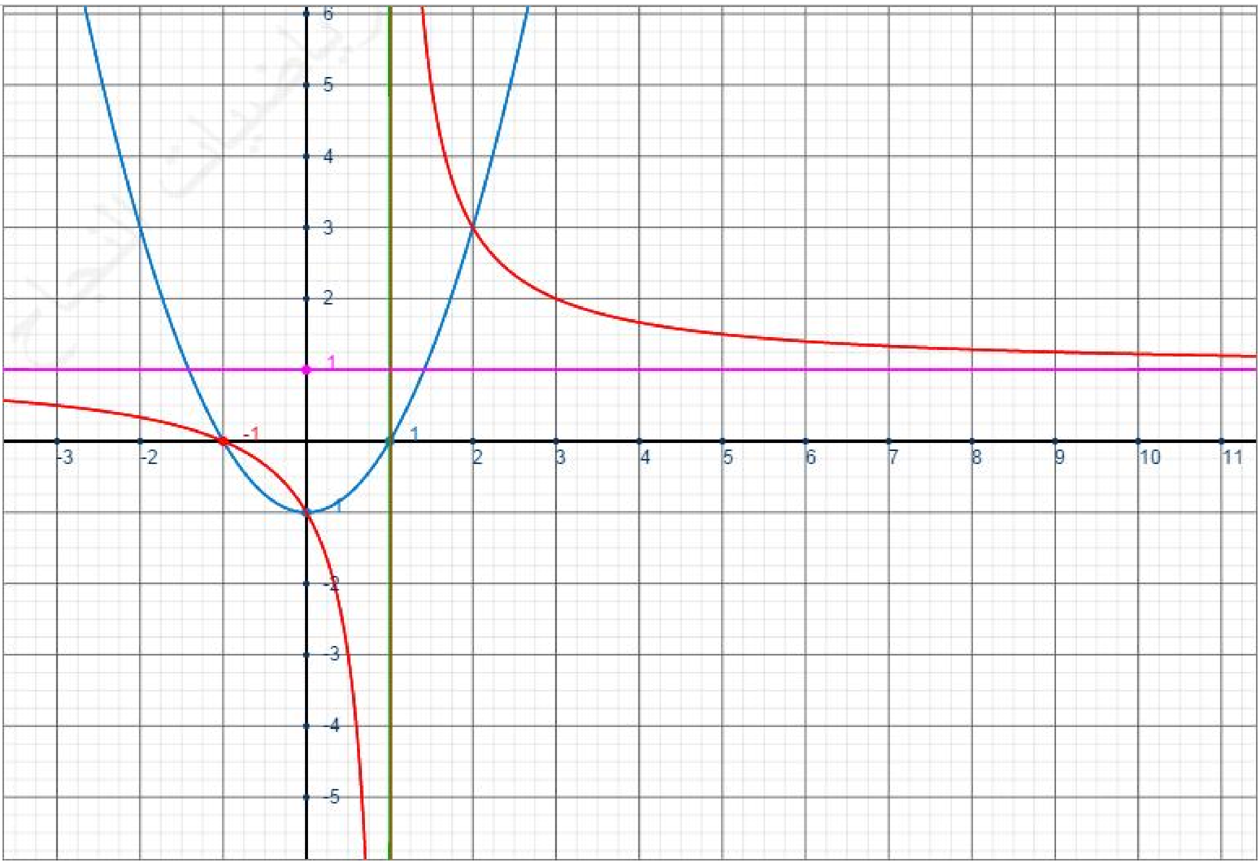
2 لدينا : $f(-1)=1-1=0$ و $g(-1)=\dfrac{0}{-2}=0$ منه : $f(-1)=g(-1)=0$

و أيضا : $f(0)=0-1=-1$ و $g(0)=\dfrac{1}{-1}=-1$ منه : $f(0)=g(0)=-1$

و أيضا : $f(2)=4-1=3$ و $g(2)=\dfrac{3}{1}=3$ منه : $f(2)=g(2)=3$

بالتالي (C_f) و (C_g) يتقاطعان في $A_1(-1;0)$ و $A_2(0;-1)$ و $A_3(2;3)$

3



4 مبيانيا نجد $g([2;+\infty[)=]1;3]$.

5

أ) لدينا لكل x من I

$$f\circ g(x)=f(g(x))=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2-1=\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2+2x+1-(x^2-2x+1)}{(x-1)^2}=\frac{4x}{(x-1)^2}=h(x)$$

ب) لدينا g تناقصية على $I=[2;+\infty[$ ، و $g([2;+\infty[)=]1;3]$ ، ولدينا f تزايدية على $]1;3]$

إذن h تناقصية على I

تمرين 4 : $f(x)=\frac{1}{4}(x^2-2x)$ و $g(x)=\sqrt{x}$

1

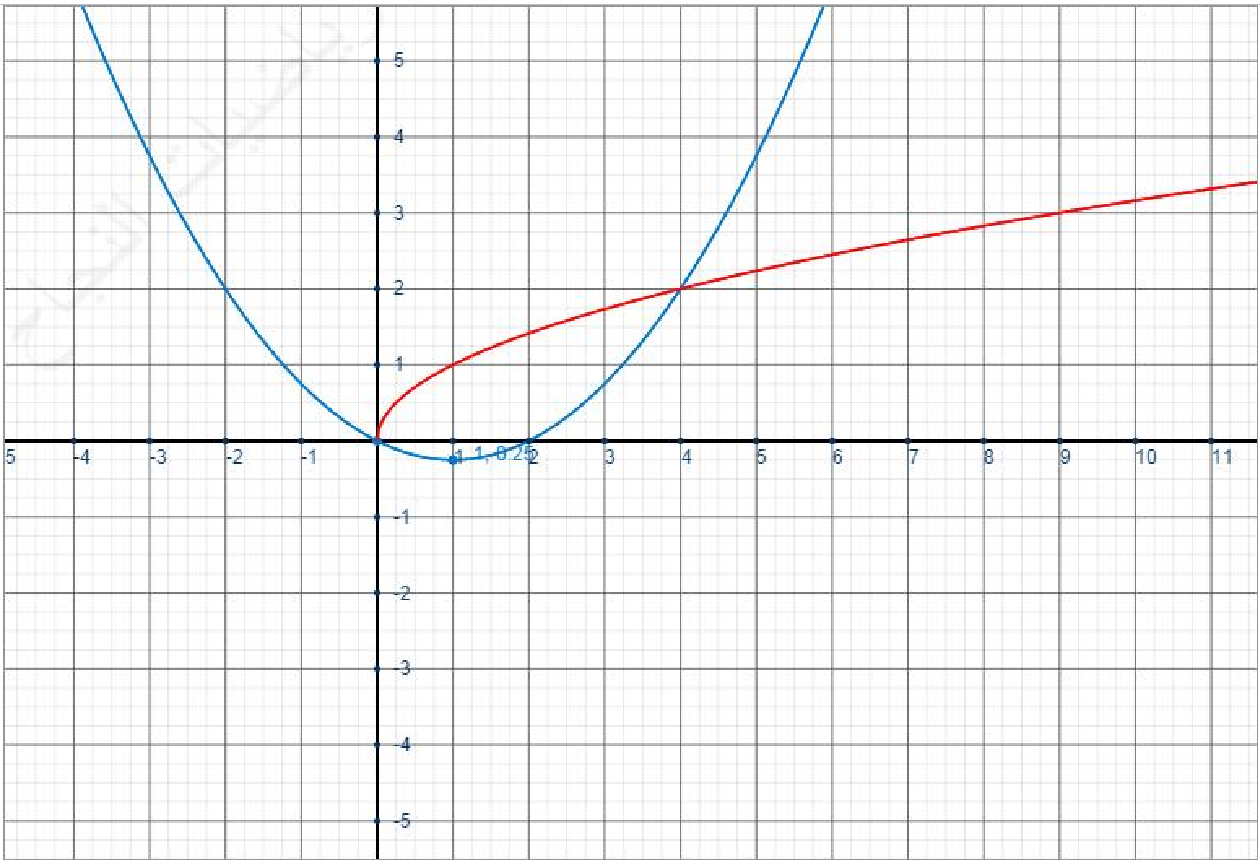
f عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية

إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه :

$\frac{-b}{2a}=\frac{\frac{2}{4}}{\frac{1}{2}}=1$ ، وبما أن $a=\frac{1}{4}>0$ فإن :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{-1}{4}$	$\nearrow$

2



$f(0)=0$ و $f(2)=0$ و $f(4)=2$ و $g(4)=2$

3 مبيانيا المعادلة $f(x)=g(x)$ تقبل حلين هما : 0 و 4

4 مبيانيا مجموعة حلول المتراجحة $f(x)<g(x)$ هي : $S=]0;4[$

5 نعتبر الدالة المعرفة على IR^+ بما يلي : $h(x)=\frac{1}{4}\left(x-2\sqrt{x}\right)$ ، حدد منحى تغيرات الدالة h على IR^+

لدينا : $h(x)=\frac{1}{4}\left(x-2\sqrt{x}\right)=\frac{1}{4}\left(\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}\right)=f(g(x))=f\circ g(x)$

- لدينا g تزايدية على $[1;+\infty[$ ، ولدينا مبيانيا $g([1;+\infty[)=[1;+\infty[$
وبما أن f تزايدية على $[1;+\infty[$ فإن h تزايدية على $[1;+\infty[$

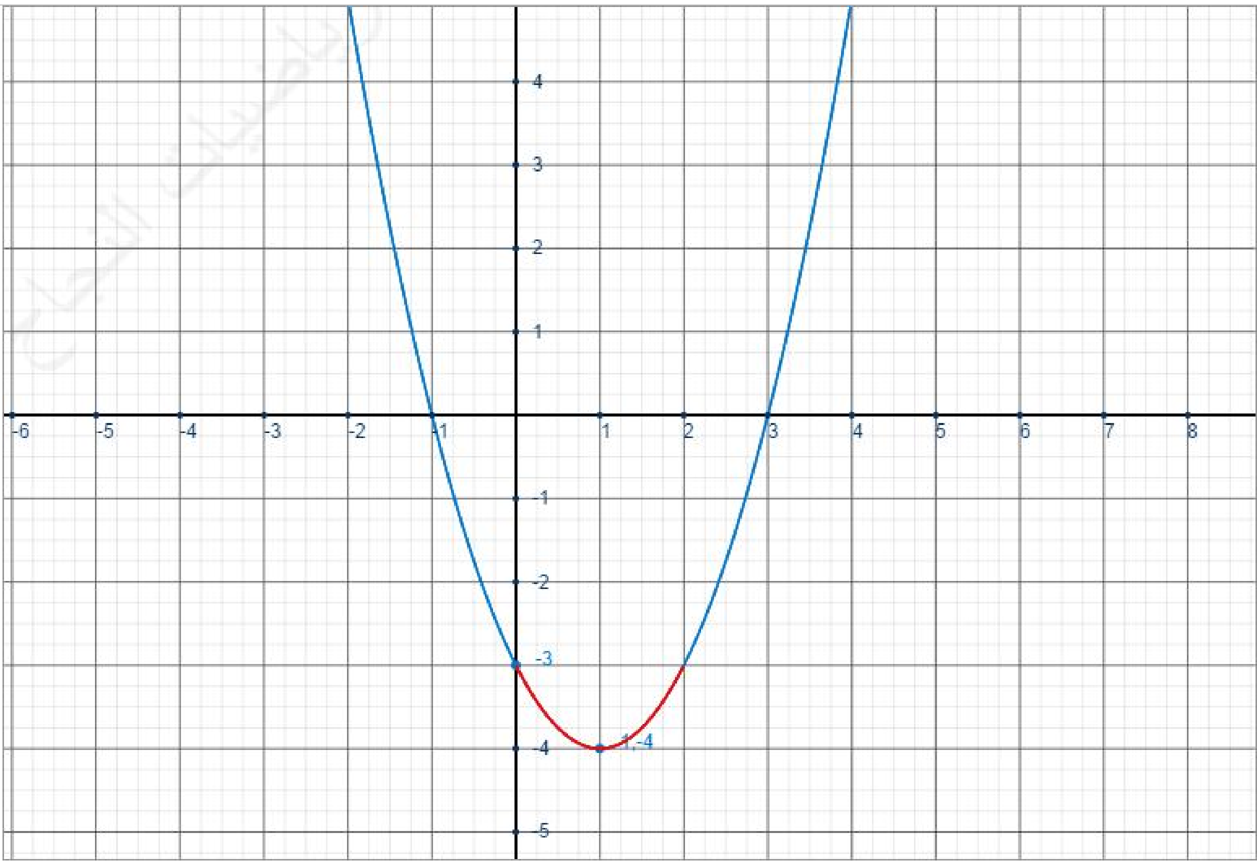
- لدينا g تزايدية على $[0;1]$ ، ولدينا مبيانيا $g([0;1])=[0;1]$
وبما أن f تناقصية على $[0;1]$ فإن h تناقصية على $[0;1]$

لم يكن ممكنا دراسة الرتابة على IR^+ مباشرة لأن $g(0)=[0;+\infty[$ ، لكن رتابة f على هذا المجال متغيرة(ليست دائما تزايدية و لا تناقصية)، لذلك قمنا بتقسيم المجال لمجالين حيث يكون صورة كل منهما عبارة عن مجال تكون فيه رتابة الدالة f ثابتة.

تمرين 5 : نعتبر الدوال : $f(x)=x^2-2x-3$ و $g(x)=x^2-2|x|-3$ و $h(x)=\left|x^2-2x-3\right|$

1 أ) f عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية
إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه :
$\frac{-b}{2a}=\frac{2}{2}=1$ ، وبما أن $a=1>0$ فإن :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$



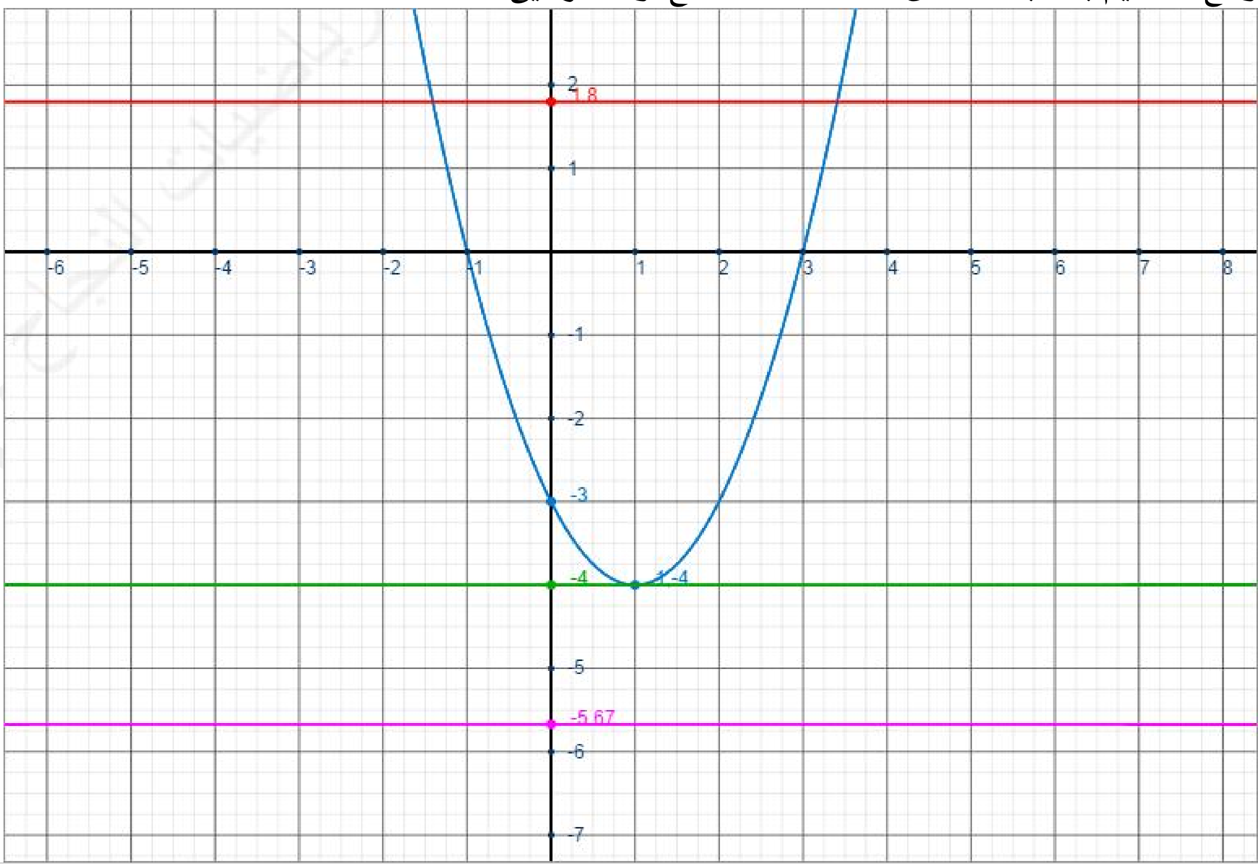
ب) مبيانيا نجد أن مجموعة حلول المتراجحة : $f(x)\le -3$ هي: $S=[0;2]$

- إذا كان $m<-4$ فالمعادلة $f(x)=m$ لا حل لها
- إذا كان $m=-4$ فالمعادلة $f(x)=m$ لها حل وحيد (هو $x=1$)
- إذا كان $m>-4$ فالمعادلة $f(x)=m$ لها حلان بالضبط.

ليس مطلوبا حل المعادلة بل فقط تحديد عدد الحلول

الطريقة تعتمد على تخيل مستقيم مواز لمحور الأفاصيل و يقطع محور الأفاصيل في نقطة أرتوبها m ، و وفق وضع المستقيم بالنسبة للمنحنى نحدد حالات التقاطع، و هذا توضيح :

ج)



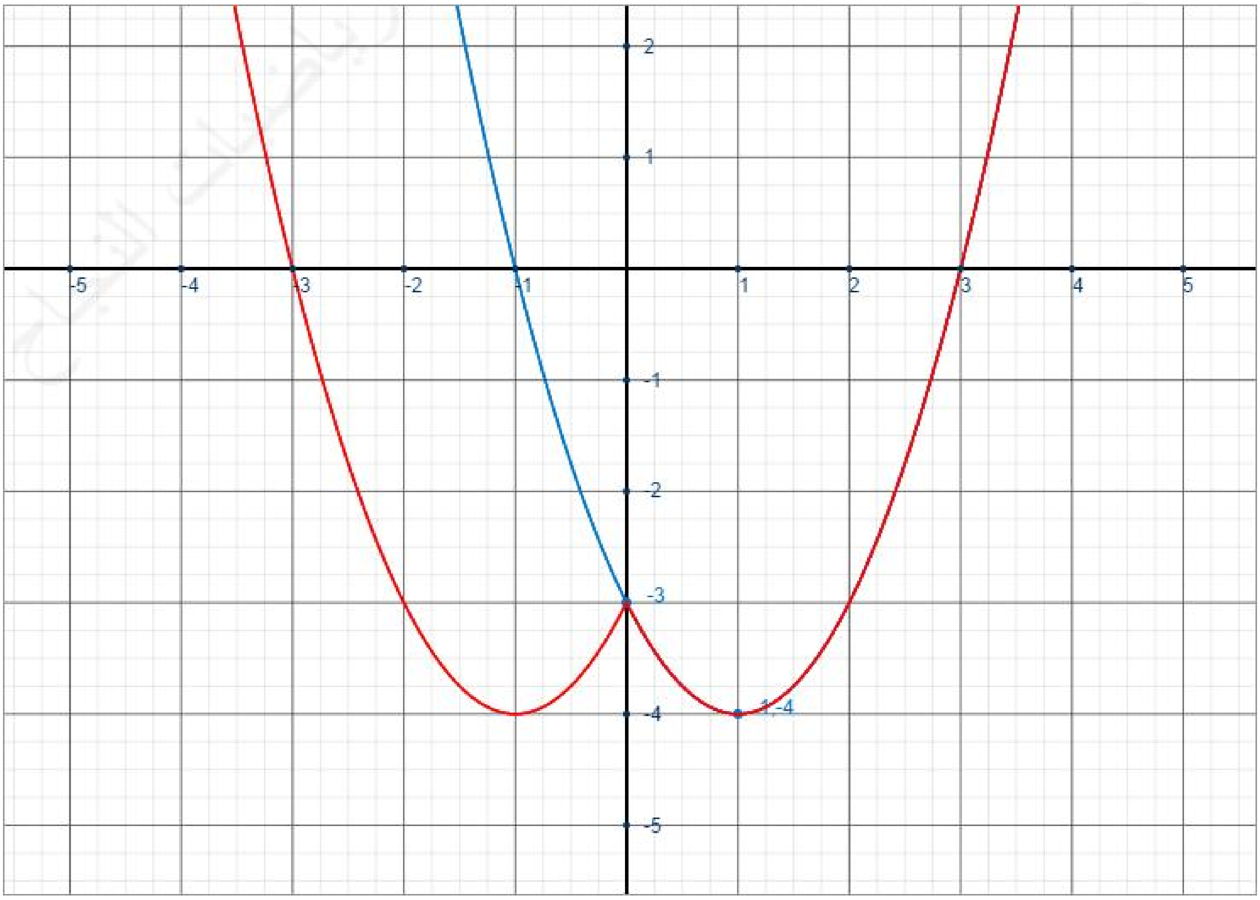
أ) $Dg = IR$ و $g(x) = g(-x)$ $\forall x \in IR$ إذن f دالة زوجية .

2

ب) بما أن f دالة زوجية، فتمثيلها المبياني متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب.

بما أن $g(x) = f(x)$ $\forall x \in IR^{+}$ فالتمثيل المبياني للدالة g هو نفس التمثيل المبياني للدالة f على IR^{+}

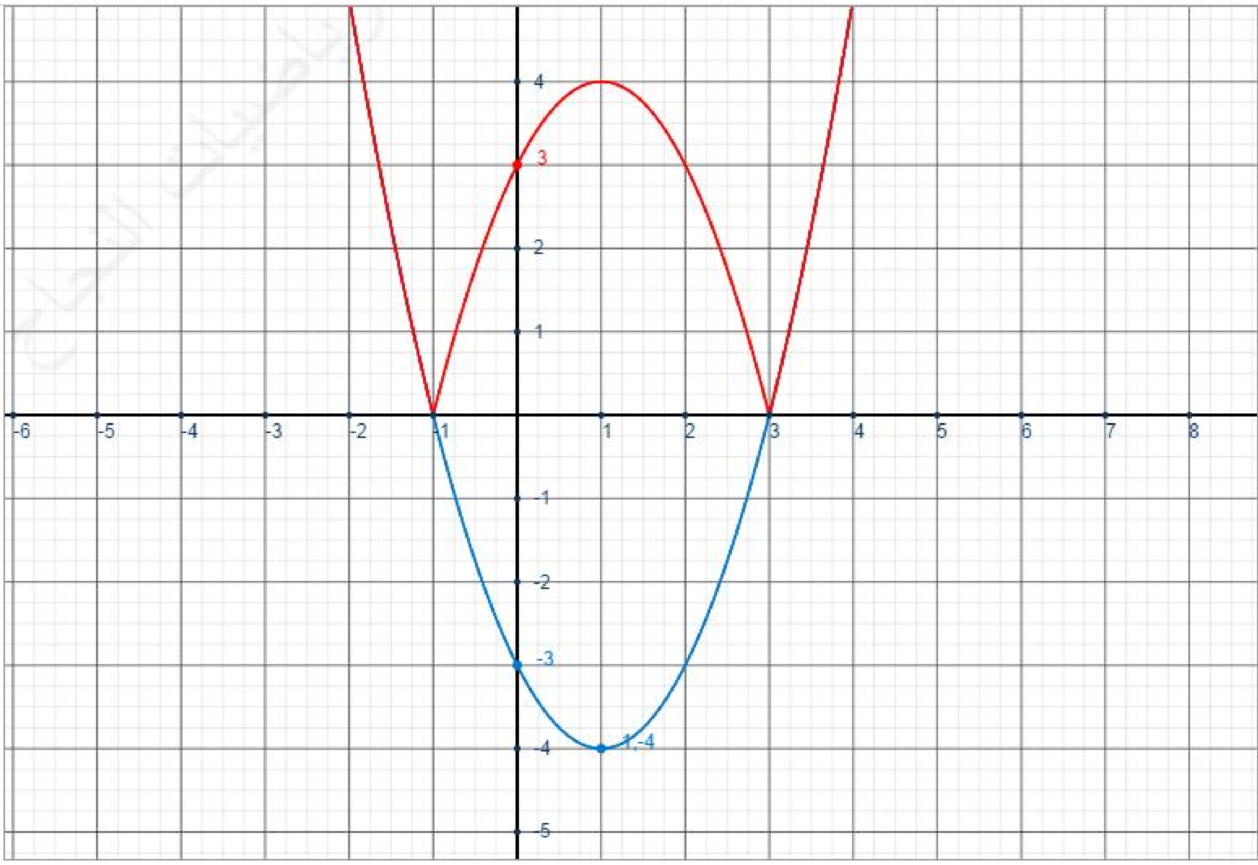
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$ -3 $\searrow$	-4	$\nearrow$



3

أ) على $]-\infty;-1]$ و $[3;+\infty[$ $f(x) \geq 0$ منه $h(x) = f(x)$

و على $[-1;3]$ $f(x) \leq 0$ منه $h(x) = -f(x)$



4