| السنة 1 بكالوريا علوم رياضية | عمموميات حول الدوال العددية<br>حلول مقترحة | سلسلة 3 |
|---|---|---|

**تمرين 1** : $f(x)=x^2+4x+1$ و $g(x)=\sqrt{x+4}$ و $h(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$

**1**

$Dg=\{x\in IR / x+4\geq 0\}=\{x\in IR / x\geq -4\}=[-4;+\infty[$

$Dh=\{x\in IR / x^2+4x+5\geq 0\}$

$\Delta=16-20=-4<0$ ، منه : $Dh=IR$

**2**

لنبين أن : $\forall x\in IR \quad f(x)\geq -3$

لدينا : $\forall x\in IR \quad f(x)-(-3)=x^2+4x+1+3=x^2+4x+4=(x+2)^2\geq 0$

بالتالي : $\forall x\in IR \quad f(x)\geq -3$

**3**

$f$ عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية ، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه :

$\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2}=-2$ ، إذن :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | ↘ | $-3$ | ↗ | |

$g$ عبارة عن دالة على شكل $\sqrt{x+a}$ ، إذن :

| $x$ | $-\infty$ | $-4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $0$ | ↗ | |

**4**

لدينا : $\forall x\in IR \quad g\circ f(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)+4}=\sqrt{x^2+4x+1+4}=\sqrt{x^2+4x+5}=h(x)$

**5**

| رتابة الدالة $h$ على $]-\infty;-2]$ | رتابة الدالة $h$ على $[-2;+\infty[$ |
|---|---|
| ▪ لدينا $f$ تناقصية على $]-\infty;-2]$<br>▪ لدينا $f(]-\infty;-2])=[f(-2);+\infty[=[-3;+\infty[$<br>▪ لدينا $g$ تزايدية على $[-3;+\infty[$<br>إذن $h$ تناقصية على $]-\infty;-2]$ | ▪ لدينا $f$ تزايدية على $[-2;+\infty[$<br>▪ لدينا $f([-2;+\infty[)=[f(-2);+\infty[=[-3;+\infty[$<br>▪ لدينا $g$ تزايدية على $[-3;+\infty[$<br>إذن $h$ تزايدية على $[-2;+\infty[$ |

لتحديد رتابة المركب $p\circ q(x)$ على مجال $I$ ، نتبع 3 مراحل:

1) ندرس رتابة $q(x)$ على $I$ 2) نحسب $J$ صورة $I$ بالدالة $q(x)$ 3) ندرس رتابة الدالة $p(x)$ على المجال $J$

و في الأخير نحدد رتابة المركب انطلاقا من نتائج المرحلتين الأولى و الثالثة مثل قاعدة إشارة جداء

**تمرين 2** : نعتبر الدوال $f(x)=x^2-4x+3$ و $g(x)=x^2$ و $h(x)=x^4-4x^2+3$

**1**

لدينا : $Dh=IR$ و $\forall x\in IR \quad h(-x)=h(x)$ إذن $h$ دالة زوجية

**2**

$f$ عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية ، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه

$\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2}=2$ ، إذن :

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | ↘ | $-1$ | ↗ | |

$g$ عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية ، إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه

$\frac{-b}{2a}=\frac{0}{2}=0$ ، إذن :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | ↘ | $0$ | ↗ | |

**3**

$\forall x \in IR \quad h(x)=f(g(x))=f\circ g(x)$

**4**

$g$ تزايدية على $[0;\sqrt{2}]$ إذن : $g([0;\sqrt{2}])=[g(0);g(\sqrt{2})]=[0;2]$

$g$ تزايدية على $[\sqrt{2};+\infty[$ إذن : $g([\sqrt{2};+\infty[)=[g(\sqrt{2});+\infty[=[2;+\infty[$

يمكن الاستعانة بجدول التغيرات مباشرة.

لدينا $g$ تزايدية على $[0;\sqrt{2}]$ و $g([0;\sqrt{2}])=[0;2]$ و $f$ تناقصية على $[0;2]$

إذن $h$ تناقصية على $[0;\sqrt{2}]$

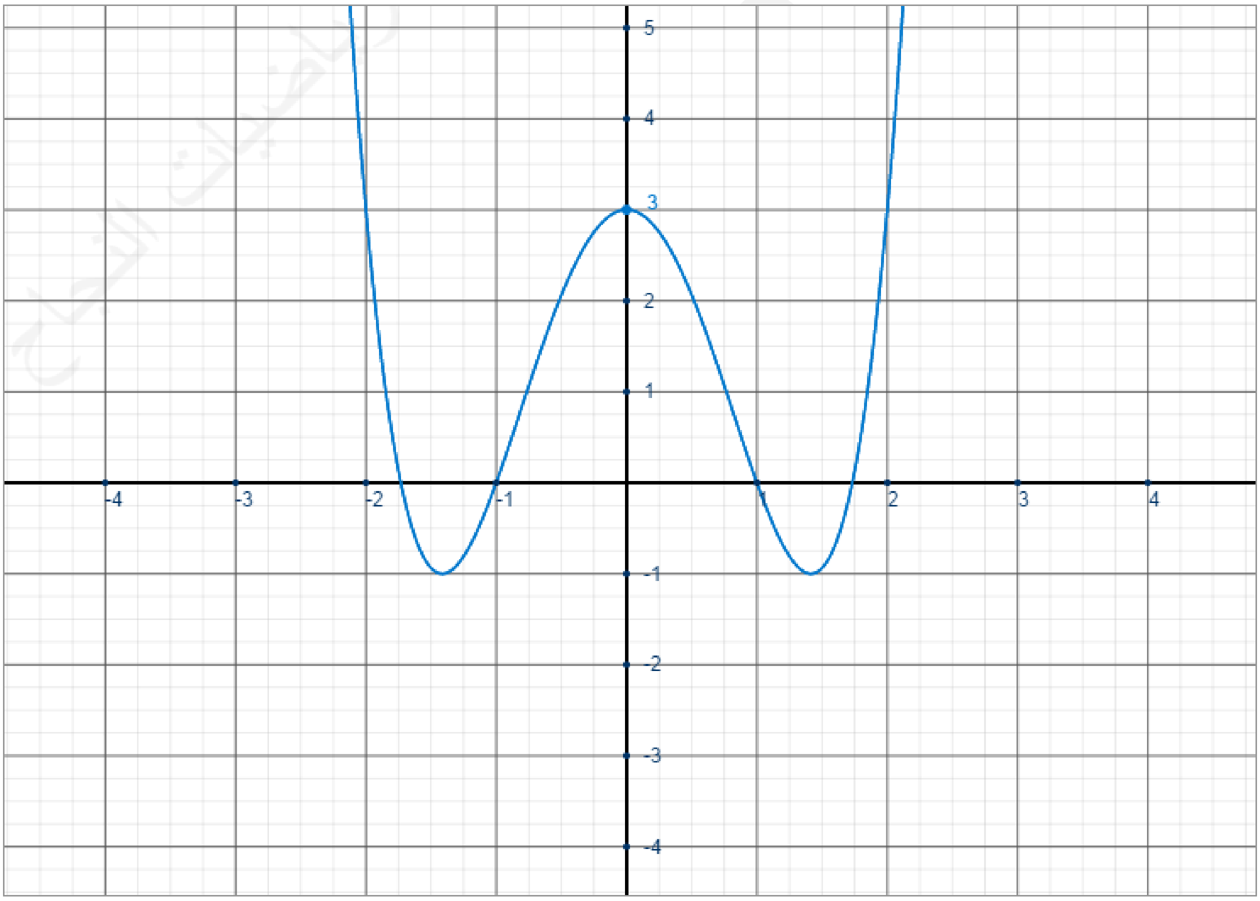
ولدينا $g$ تزايدية على $[\sqrt{2};+\infty[$ و $g([\sqrt{2};+\infty[)=[2;+\infty[$ و $f$ تزايدية على $[2;+\infty[$

إذن $h$ تزايدية على $[\sqrt{2};+\infty[$

**5**

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{2}$ | | $0$ | | $\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | |

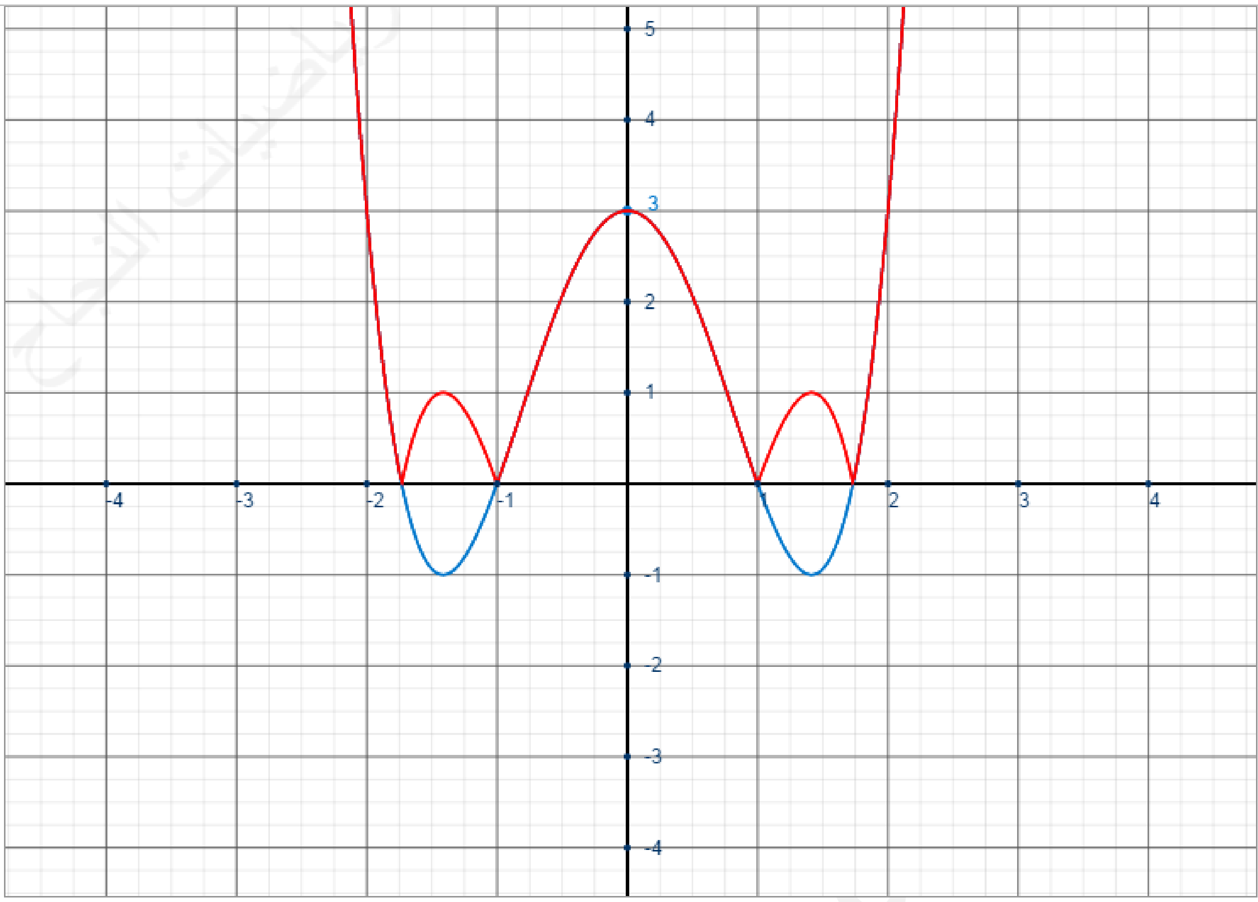
**6**




**7**

لإنشاء الدالة $(C_p)$ نحتفظ بمنحنى الدالة $h$ الذي تكون فيه موجبة و نعكسه في الحالة الأخرى

أ)



ب)

- إذا كان $m<0$ فالمعادلة $p(x)=m$ لا حل لها
- إذا كان $m=0$ فالمعادلة $f(x)=m$ لها 4 حلول بالضبط
- إذا كان $0<m<1$ فالمعادلة $f(x)=m$ لها 8 حلول بالضبط
- إذا كان $m=1$ فالمعادلة $f(x)=m$ لها 6 حلول بالضبط
- إذا كان $1<m<3$ فالمعادلة $f(x)=m$ لها 4 حلول بالضبط
- إذا كان $m=3$ فالمعادلة $f(x)=m$ لها 3 حلول بالضبط
- إذا كان $m>3$ فالمعادلة $f(x)=m$ لها حلان بالضبط.

**تمرين 3** : $f(x)=x^2-x$ و $g(x)=\sqrt{|x|}$ ، $(\Delta):\ y=-2x+2$

$f$ عبارة عن دالة حدودية من الدرجة الثانية ،

إذن تمثيلها المبياني عبارة عن شلجم رأسه :

$$\frac{-b}{2a}=\frac{-(-1)}{2}=\frac{1}{2}$$

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↘ | $\frac{-1}{4}$ | ↗ |

1 لدينا : $Dg=\{x\in IR/|x|\geq 0\}=IR$

و $\forall x\in IR\ \ g(-x)=\sqrt{|-x|}=\sqrt{|x|}=g(x)$

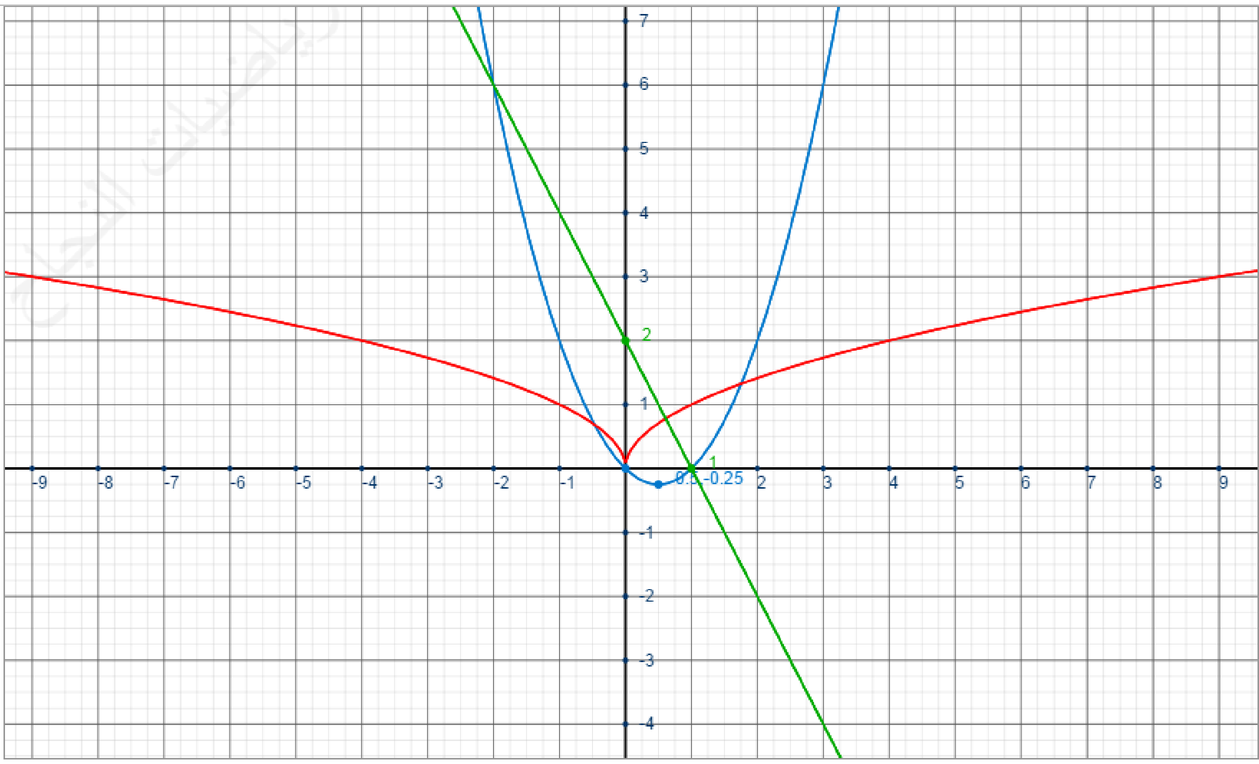
إذن : $g$ دالة زوجية

من جهة أخرى : $\forall x\in IR^+\ \ g(x)=\sqrt{x}$

إذن جدول تغيراتها هو :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ↘ | $0$ | ↗ |

2




3

المعادلة $\sqrt{|x|}+2x=2$ تكافئ $g(x)=-2x+2$

مبيانيا نجد أن $Cg$ و $(\Delta)$ يتقاطعان في نقطة واحدة، إذن المعادلة السابقة تقبل حلا وحيدا.

4

لنحدد جبريا إحداثيتي نقط تقاطع $(C_f)$ و $(\Delta)$

من أجل ذلك نحل المعادلة: $f(x)=-2x+2$ أي: $x^2-x=-2x+2$ أي: $x^2-x+2x-2=0$

أي $x^2+x-2=0$، لدينا: $\Delta=1+8=9$ منه: $x=\frac{-1+3}{2}=1$ أو $x=\frac{-1-3}{2}=-2$

إذن $(C_f)$ و $(\Delta)$ يتقاطعان في النقطتين: $E(1,f(1))$ و $F(-2,f(-2))$ أي: $E(1,0)$ و $F(-2,6)$

5

مبيانيا نجد أن:

- حل المتراجحة $g(x)\le 3$ هو: $S=[-9;9]$
- حل المتراجحة $g(x)\ge 2$ هو: $S=]-\infty,-4]\cup[4,+\infty[$
- حل المتراجحة $-2x+2<f(x)<2$ هو: $S=(]-\infty,-2]\cup[1,+\infty[)\cap[-1,2]=[1;2]$

6

$g\left(\left[0;\frac{1}{4}\right[\right)=\left[0;\frac{1}{2}\right[$ و $g\left(\left[\frac{1}{4};+\infty\right[\right)=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

$f([-2;1])=\left[\frac{-1}{4};6\right]$ و $f([2;+\infty[)=[2;+\infty[$ و $f(]-\infty;0])=[0;+\infty[$

7

لدينا: $Dh=IR^+$ و $\forall x\in IR^+\ \ h(x)=x-\sqrt{x}=(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}=f(\sqrt{x})=f(g(x))=f\circ g(x)$

رتابة الدالة $h$ على $I=\left[0;\frac{1}{4}\right[$ ، لدينا:

- $g$ تزايدية على $I$
- $g(I)=\left[0;\frac{1}{2}\right[$ و $f$ تناقصية على $\left[0;\frac{1}{2}\right[$

إذن $h$ تناقصية على $\left[0;\frac{1}{4}\right[$

رتابة الدالة $h$ على $J=\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ ، لدينا:

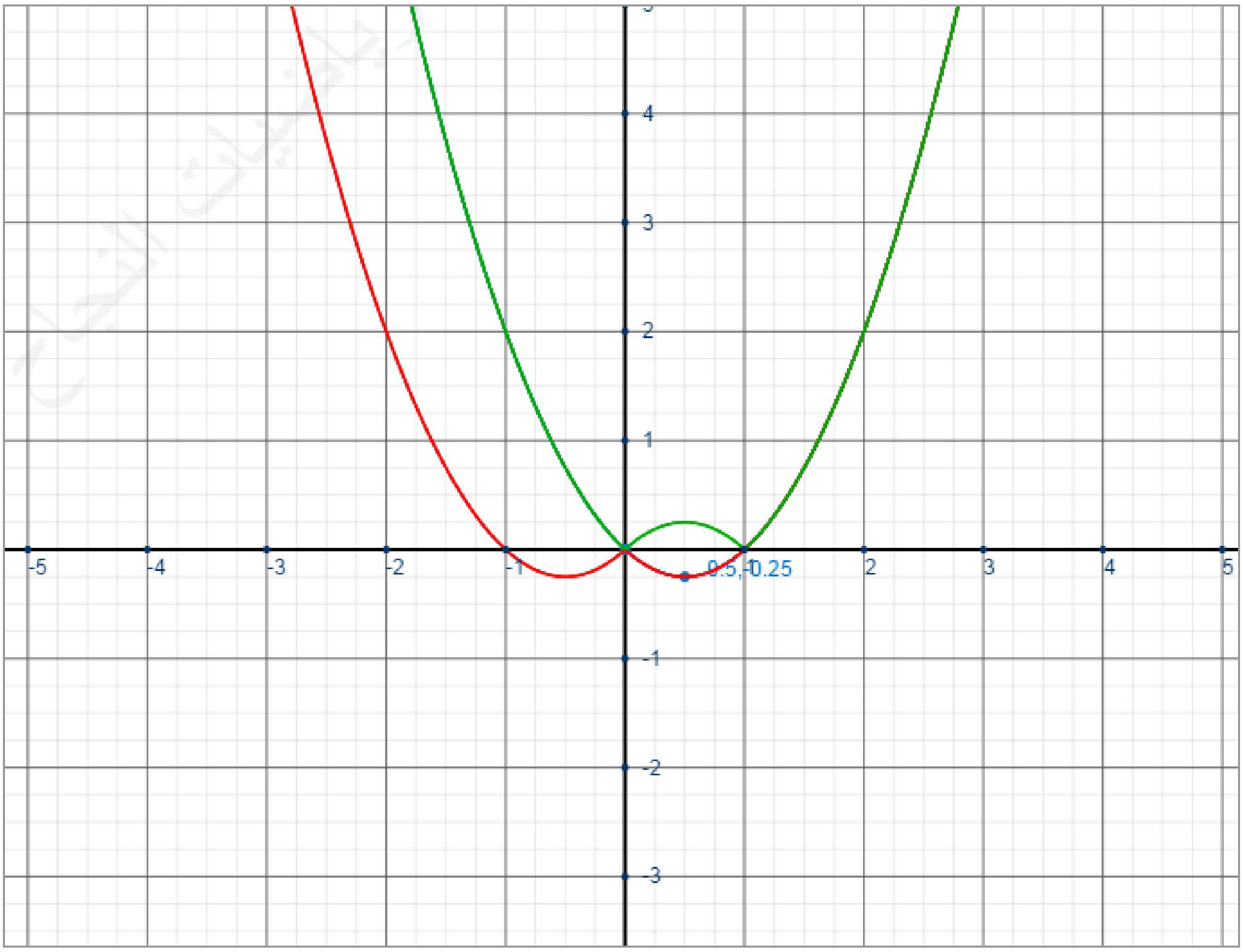
- $g$ تزايدية على $J$
- $g(J)=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ و $f$ تزايدية على $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

إذن $h$ تزايدية على $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$

صعوبة السؤال تكمن في إيجاد التقسيم المناسب للمجال $[0;+\infty[$ حتى يمكن تطبيق خاصية رتابة مركب دالتين

$k(x)$ دالة زوجية تساوي $f(x)$ على $[0;+\infty[$ (اللون الأحمر)

منحنى الدالة $p(x)$ يطابق منحنى الدالة $f$ في المجال الذي تكون فيه موجبة و يماثله في الحالة الأخرى (اللون الأخضر)




8

- إذا كان $m < \frac{-1}{4}$ فالمعادلة $k(x)=m$ لا حل لها
- إذا كان $m = \frac{-1}{4}$ فالمعادلة $k(x)=m$ لها حلان بالظبط.
- إذا كان $\frac{-1}{4} < m < 0$ فالمعادلة $k(x)=m$ لها 4 حلول بالظبط
- إذا كان $m=0$ فالمعادلة $k(x)=m$ لها 3 حلول بالظبط
- إذا كان $m>0$ فالمعادلة $k(x)=m$ لها حلان بالظبط

9

**تمرين 4** : $n\in IN^*$

- لدينا : $1<3<4$ منه $1<\sqrt{3}<2$ منه : $E(\sqrt{3})=1$
- لدينا : $4<7<9$ منه $2<\sqrt{7}<3$ منه $7<\sqrt{7}+5<8$ منه : $E(\sqrt{7}+5)=7$
- لدينا : $(\sqrt{2}+1)^2=3+\sqrt{8}$ و $2<\sqrt{8}<3$ منه $5<(\sqrt{2}+1)^2<6$ منه : $E\left((\sqrt{2}+1)^2\right)=5$
- لدينا : $n^2\le n^2+n<n^2+2n+1$ منه : $n\le\sqrt{n^2+n}<n+1$ منه : $E\left(\sqrt{n^2+n}\right)=n$
- لدينا : $\frac{2n+1}{2n}=1+\frac{1}{2n}$ و : $0\le\frac{1}{2n}<1$ منه : $E\left(\frac{2n+1}{2n}\right)=1+E\left(\frac{1}{2n}\right)=1+0=1$
- لدينا : $\frac{2n+3}{n+1}=\frac{2n+2+1}{n+1}=2+\frac{1}{n+1}$ و : $0\le\frac{1}{n+1}<1$ منه : $E\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)=2+E\left(\frac{1}{n+1}\right)=2+0=2$
- لدينا : $\frac{n^2+2n+4}{n+1}=\frac{(n+1)^2+3}{n+1}=n+1+\frac{3}{n+1}$ منه : $E\left(\frac{n^2+2n+4}{n+1}\right)=n+1+E\left(\frac{3}{n+1}\right)$

1

| | | |
|---|---|---|
| | إذا كان $\frac{3}{n+1}<1$ (أي $n>2$) فإن: $E\left(\frac{n^2+2n+4}{n+1}\right)=n+1$<br>إذا كان: $n=2$ (لا توجد حالة أخرى لكون $n\in IN^*$) فإن: $E\left(\frac{n^2+2n+4}{n+1}\right)=3+E\left(\frac{3}{3}\right)=4$ | |
| | للتذكير: إذا كان $p\le x<p+1$ حيث $p\in Z$ فإن: $E(x)=p$<br>$E(x+p)=p+E(x)$ لكل $x\in IR$ و لكل $p\in Z$<br>قد نظطر لدراسة الحالات في تعابير تتضمن بارامترا أو متغيرا. | |
| 2 | ▪ $3\le x<4 \Leftrightarrow E(x)=3$ بالتالي: $S=[3;4[$<br>▪ $-2\le x<\frac{-5}{3} \Leftrightarrow -1\le 3x+5<0 \Leftrightarrow E(3x+5)=-1$ بالتالي: $S=\left[-2;\frac{-5}{3}\right[$<br>▪ $E(x^2+5)=\frac{7}{4}\notin Z \Leftrightarrow 4E(x^2+5)=7$ بالتالي: $S=\phi$<br>▪ نضع: $\frac{x}{3}=k$ فتصبح المعادلة تكافئ: $E\left(\frac{x+1}{2}\right)=\frac{x}{3} \Leftrightarrow \begin{cases}E\left(\frac{3k+1}{2}\right)=k\\ k\in Z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k\le\frac{3k+1}{2}<k+1\\ k\in Z\end{cases}$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases}2k\le 3k+1<2k+2\\ k\in Z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1\le k<1\\ k\in Z\end{cases}$<br>$\Leftrightarrow k=0 \ ou \ k=-1$<br>بالتالي: $S=\{0;-3\}$ | |
| 3 | ▪ $x<5 \Leftrightarrow E(x)\le 4$ بالتالي: $S=]-\infty;5[$<br>▪ $x<3 \Leftrightarrow E(x)\le 2 \Leftrightarrow E(x)\le 2{,}5 \Leftrightarrow 2E(x)\le 5$ بالتالي: $S=]-\infty;3[$<br>$x\ge 2 \Leftrightarrow E(x)\ge 2$ بالتالي: $S=[2;+\infty[$<br>▪ $x\ge 3 \Leftrightarrow E(x)\ge 3 \Leftrightarrow E(x)\ge 2{,}5 \Leftrightarrow 2E(x)\ge 5$ بالتالي: $S=[3;+\infty[$<br>▪ $-3\le x<\frac{10}{3} \Leftrightarrow -9\le 3x<10 \Leftrightarrow -9\le E(3x)\le 9 \Leftrightarrow -10<E(3x)<10 \Leftrightarrow \lvert E(3x)\rvert<10$<br>بالتالي: $S=\left[-3;\frac{10}{3}\right[$ | |
| | الهدف من التمرين التعريف بإحدى القواعد غير المعروفة: $x<p \Leftrightarrow E(x)\le p$ و $x\ge p \Leftrightarrow E(x)\ge p$ حيث $p\in Z$ | |
| | **تمرين 5**: مزيدا من التفكير | |
| 1 | حدد القيمة الدنوية المطلقة و القيمة المطلقة القصوية للدالة $f(x)=\frac{x}{x^2+x+1}$<br>أولا لدينا: $\forall x\in IR \ x^2+x+1>0$ لأن: $\Delta=-3<0$ و $a=1>0$<br>من جهة أخرى، ليكن: $(\alpha,\beta)\in IR^2$، نعتبر العبارة $(P)$: $\forall x\in IR \ \alpha\le f(x)\le\beta$<br>$(P) \Leftrightarrow \forall x\in IR \ \alpha\le\frac{x}{x^2+x+1}\le\beta$<br>لدينا: $(P) \Leftrightarrow \forall x\in IR \ \alpha x^2+\alpha x+\alpha\le x\le\beta x^2+\beta x+\beta$<br>$(P) \Leftrightarrow \forall x\in IR \begin{cases}\alpha x^2+(\alpha-1)x+\alpha\le 0\\ \beta x^2+(\beta-1)x+\beta\ge 0\end{cases}$ | |

إذن لكي تتحقق العبارة $(P)$ يكفي أن يكون : $\begin{cases}\alpha<0\\(\alpha-1)^2-4\alpha^2\le 0\end{cases}$ و $\begin{cases}\beta>0\\(\beta-1)^2-4\beta^2\le 0\end{cases}$

أي : $\begin{cases}\alpha<0\\-3\alpha^2-2\alpha+1\le 0\end{cases}$ و $\begin{cases}\beta>0\\-3\beta^2-2\beta+1\le 0\end{cases}$

لدينا محددة الحدودية $-3x^2-2x+1$ هي : $\Delta=4+12=16$ منه : $x_1=\dfrac{2+4}{-6}=-1$ و $x_1=\dfrac{2-4}{-6}=\dfrac{1}{3}$

منه : $x\le -1 \ \ ou \ \ x\ge\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow -3x^2-2x+1\le 0$ (باستعمال جدول الإشارات)

إذن لكي تتحقق العبارة $(P)$ يكفي أن يكون : $\begin{cases}\alpha<0\\\alpha\ge\dfrac{1}{3}\ ou\ \alpha\le -1\end{cases}$ و $\begin{cases}\beta>0\\\beta\ge\dfrac{1}{3}\ ou\ \beta\le -1\end{cases}$

إذن يكفي أن نأخذ: $\alpha=\dfrac{1}{3}$ و $\beta=-1$

الآن نبرهن بسهولة أن : $\forall x\in IR\ \ -1\le f(x)\le\dfrac{1}{3}$ $\quad (P)$: (بحساب الفرق)

و أيضا : $f(1)=\dfrac{1}{3}$ و $f(-1)=-1$ وبذلك يكون : $\underset{x\in IR}{Max}\ f(x)=\dfrac{1}{3}$ و $\underset{x\in IR}{Min}\ f(x)=-1$

---

2

لنحل في $IR$ المعادلة : $E(x^2)=(E(x))^2$

نضع: $E(x)=p$ منه $E(x^2)=p^2$ منه : $\begin{cases}p\le x<p+1\\p^2\le x^2<p^2+1\end{cases}$

إذا كان : $p<0$ فإن: $p\le -1$ منه $p+1\le 0$ منه : $\begin{cases}(p+1)^2<x^2\le p^2\\p^2\le x^2<p^2+1\end{cases}$ منه $p^2\le x^2\le p^2$ منه

$x^2=p^2$ منه: $x=p$ أو $x=-p$ ، عكسيا العددان $p$ و $-p$ يحققان المعادلة.

إذا كان $p\ge 0$ فإن المعادلة تكافئ: $\begin{cases}x\ge 0\\p^2\le x^2<(p+1)^2\\p^2\le x^2<p^2+1\end{cases}$ تكافئ : $\begin{cases}x\ge 0\\p^2\le x^2<p^2+2p+1\\p^2\le x^2<p^2+1\end{cases}$

تكافئ $\begin{cases}x\ge 0\\p\le x^2<p^2+1\end{cases}$ (لأن: $p^2+1\le p^2+2p+1$ حيث أن : $x<p^2+1\Rightarrow x<p^2+2p+1$ )

تكافئ: $p\le x<\sqrt{p^2+1}$

خلاصة: $S=\{p,-p\ /\ p\in IN^*\}\cup\left(\bigcup_{p\in IN}\left[p,\sqrt{p^2+1}\right[\right)=Z\cup\left(\bigcup_{p\in IN}\left[p,\sqrt{p^2+1}\right[\right)$

---

- مجموعة الحلول هي عبارة عن اتحاد المجموعة $Z$ و مجالات ، مثلا المجال $\left]3;\sqrt{10}\right[$ جزء من مجموعة الحلول
- الرمز $\left(\bigcup_{p\in IN}\left[p,\sqrt{p^2+1}\right[\right)$ يرمز لاتحاد مجالات غير منتهية