دوران جسم صلب غير قابل للتشويه حول محور ثابت

Rotation d’un solide indéformable autour d’un axe fixe

1 - حركة جسم صلب في دوران حول محور ثابت :

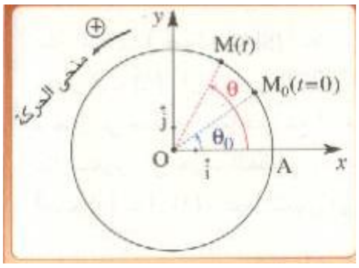
في حياتنا اليومية توجد أجسام صلبة في حركة دوران حول محور ثابت كالباب والناعورة والبكرة .....الخ

1-1 تعريف :

نقول ان جسما صلبا في دوران حول محور ثابت اذا كانت كل نقطة من نقطه في حركة دائرية ممركزة على هذا المحور .

1-2-معلمة نقطة متحركة من جسم صلب :

نعتبر جسم صلب في دوران حول محور ثابت .
المعلم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ متعامد ممنظم حيث المتجهة $\vec{k}$ منطبقة مع محور الدوران (Δ) والمستوى $(O,\vec{i},\vec{j})$ متطابق مع مسار النقطة M .



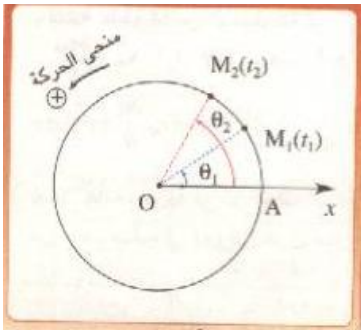
أ-الأفصول الزاوي :

نسمي الأفصول الزاوي عند لحظة ما القيمة الجبرية التي تكونها متجهة الموضع $\overrightarrow{OM}$ ومحور مرجعي Ox نتخذ أصلا للأفاصيل الزاوية. $\theta=(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM})$
يعبر عن الأفصول الزاوي في النظام العالمي للوحدات بالراديان Radian ويرمز له ب rad .

أ - الأفصول المنحني :

نسمي الأفصول المنحني قياس القوس $s=\widehat{AM}$
A أصل الأفاصيل المنحنية .
S مقدار جبري اشارته تتعلق بتوجيه المسار .
يعبر عن الأفصول المنحني بالمتر يرمز له ب m .

ج- العلاقة بين الأفصول المنحني والأفصول الزاوي :
نبرهن في الرياضيات : $s=R\theta$
R شعاع المسار.
θ الأفصول الزاوي .
S الأفصول المنحني .



2 - السرعة الزاوية :

2-1 السرعة الزاوية المتوسطة :

عندما ينجز الجسم حركة دوران حول المحور (Δ) تدور النقطة M بالزاوية θ_1 عند اللحظة t_1 وبالزاوية θ_2 عند اللحظة t_2 .

السرعة الزاوية المتوسطة تكتب :

$$\omega_m=\frac{\theta_2-\theta_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

وحدة السرعة الزاوية في النظام العالمي للوحدات هي الراديان على الثانية ومزها : $rad.s^{-1}$.

تطبيق :

احسب السرعة الزاوية لدوران الأرض حول نفسها علما أن الأرض تنجز دورة كاملة خلال يوم فلكي حيث T=23h56min4s

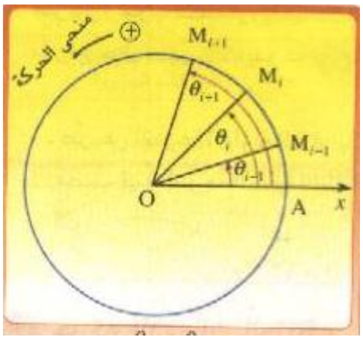
الحل :

خلال المدة : $\Delta t = T = 23h56min\,4s = 23 \times 3600 + 56 \times 60 + 4 = 86164s$ تنجز الأرض دورة واحدة $\Delta\theta = 2\pi = 6{,}28\,rad$

وبالتالي فالسرعة الزاوية :

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{6{,}28}{86164} = 7{,}3.10^{-5} rad.s^{-1}$$

2-2 السرعة الزاوية اللحظية :



نعتبر لحظتين t_{i+1} و t_{i-1} جد متقاربتين تؤطران اللحظة t_i ، اذا كان $\theta_{i+1} - \theta_{i-1}$ الفرق في الأفصول الزاوي بين هاتين اللحظتين ، فان السرعة الزاوية اللحظية هي:

$$\omega_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$

السرعة الزاوية اللحظية لنقطة متحركة من جسم صلب في دوران حول محور ثابت هي سرعته الزاوية في لحظة t .

3-2 العلاقة بين السرعة الزاوية و السرعة الخطية :

السرعة الخطية لنقطة متحركة هي :

$$V_i = \frac{M_{i-1}M_{i+1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{\delta s}{\delta t}$$

لدينا : $s = R\theta$

وبالتالي : $\delta s = R\delta\theta$

$$V_i = \frac{\delta s}{\delta t} = \frac{R\delta\theta}{\delta t}$$

نستنتج :

$$V_i = R.\omega_i$$

V_i السرعة الخطية عند اللحظة t_i.

3 - حركة الدوران المنتظم :

1-3 تعريف :

تكون حركة دوران جسم صلب حول محور ثابت منظمة اذا بقيت سرعته الزاوية اللحظية ثابتة $\omega = cte$.

2-3 الدور والتردد :

مع مرور الزمن تتكرر حركة جسم دورانه منتظم ، نقول ان الحركة دورية .اذا كان الجسم ينجز دورة خلال مدة زمنية T فان T تسمى دور الحركة .

نستنتج أن : $\omega = \frac{2\pi}{T}$

تعريف التردد :

التردد f لحركة الدوران المنتظم هو عدد الدورات في الثانية .

نكتب : $f = \frac{1}{T}$ أو $f = \frac{\omega}{2\pi}$

3-3 المعادلة الزمنية للحركة :

اذا كان الأفصول الزاوي لنقطة متحركة من جسم صلب في دوران عند التاريخ t هو θ و عند التاريخ البدئي t_0 هو θ_0 فان:

$$\omega = \frac{\theta-\theta_0}{t-t_0}$$

وبالتالي : $\theta = \omega(t-t_0) + \theta_0$

وفي حالة : $t_0=0$ نكتب : $\{\theta = \omega t + \theta_0\}$ (1)

تمثل العلاقة (1) المعادلة الزمنية لحركة النقطة M من جسم في دوران حول محور ثابت بدلالة الأفصول الزاوي .
باعتبار الأفصول المنحني تكون المعادلة الزمنية لحركة النقطة M هي :
لدينا : $s=R\theta$ و $s_0=R\theta_0$ و $V=R\omega$

$$R\theta = R\omega t + R\theta_0$$

نستنتج أن : $s=Vt+s_0$

تطبيق :

المعادلة الزمنية لحركة نقطة M من جسم صلب في دوران حول محور ثابت هي :

$$s(t)=0{,}70t+0{,}03$$

حيث t بالثانية و s بالمتر.

1 - ما هي طبيعة حركة الجسم الصلب ؟
2 - حدد قيمتي الأفصول المنحني للنقطة M عند اللحظة $t=0$ وسرعتها الخطية .
3 - اذا علمت أن قطر المسار الدائري هو $D=30cm$ ، أوجد تعبير الأفصول الزاوي $\theta(t)$ للنقطة M بدلالة t .

الحل :

1 - بما أن الجسم في حركة دوران حول محور ثابت ، والمعادلة الزمنية لنقطة متحركة من هذا الجسم هي من الدرجة الأولى بالنسبة للزمن ، اذن حركة الجسم دوران منتظم .

2 - بالنسبة لحركة الدوران المنتظم نكتب :
$s(t)=Vt+s_0$ (1)
حسب النص : $s(t)=0{,}70+0{,}03$ (2)
بمقارنة المعادلتين (1) و (2) نستنتج :
$s_0=0{,}03m$ و $V=0{,}70m.s^{-1}$

3 - نعلم أن : $\theta(t) = \omega t+\theta_0$

بحيث : $s_0=R\theta_0$ أي: $\theta_0 =\frac{s_0}{R}$
و $V=R\omega$ أي : $\omega = \frac{V}{R}$
ت.ع $R=\frac{D}{2} = \frac{0{,}3}{2}=0{,}15m$; $\theta_0=\frac{0{,}03}{0{,}15} = 0{,}20\ rad$

$$\omega=\frac{0{,}70}{0{,}15} = 4{,}67\ rad.s^{-1}$$

تعبير الافصول الزاوي :

$$\theta(t) =4{,}67t+0{,}20$$

بحيث t بالثانية (s) و θ بالراديان (rad) .