السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	مبادئ في المنطق حل مقترح	سلسلة 2

تمرين 1 : ليكن x و y عددين حقيقيين ، لنبين أن : $x+y=0 \Leftrightarrow \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$

1) لدينا من جهة :

$$x+y=0 \Rightarrow y=-x \Rightarrow \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=x^2+1-x^2=1$$

2) و من جهة أخرى :

$$\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1 \Rightarrow \begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\times\left(-y+\sqrt{y^2+1}\right)=\left(-y+\sqrt{y^2+1}\right)\\ \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\times\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x+\sqrt{x^2+1}=-y+\sqrt{y^2+1}\\ y+\sqrt{y^2+1}=-x+\sqrt{x^2+1}\end{cases}$$

$$\Rightarrow x+y+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=-y-x+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}$$

$$\Rightarrow 2x+2y=0 \Rightarrow x+y=0$$

بالتالي : $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1 \Leftrightarrow x+y=0$

استعمال التكافؤات فقط أمر جد صعب، لذلك نلجأ إلى استعمال استلزامين و نبدأ دائما بأسهلهما.

تمرين 2 : نفترض أن : $\exists n\in IN^* \quad \sqrt{\dfrac{n}{n+2}}\in Q$

إذن يوجد $(p,q)\in IN\times IN^*$ حيث : $\sqrt{\dfrac{n}{n+2}}=\dfrac{p}{q}$ و $p\wedge q=1$

$$\sqrt{\frac{n}{n+2}}=\frac{p}{q} \Rightarrow \frac{n}{n+2}=\frac{p^2}{q^2} \Rightarrow nq^2=np^2+2p^2 \Rightarrow n\left(q^2-p^2\right)=2p^2$$

إذن : $n\left(q^2-p^2\right)$ عدد زوجي

إذن أحد العددين q^2-p^2 أو n زوجي (لأنهما إن كانا معا فرديين فسيكون جداؤهما فرديا)

- إذا كان q^2-p^2 زوجيا

فإن p و q سيكون لهما نفس الزوجية (فرديان معا أو زوجيان معا) (لأنه إن كانا مختلفا الزوجية فسيكون مربعاهما أيضا مختلفا الزوجية و بذلك يكون فرق مربعيهما عددا فرديا)

و بما أنهما أوليان فيما بينهما فلا يمكن أن يكونا زوجيان معا (لأنه سيكون 2 قاسما مشتركا لهما)

إذن سنستنتج أنهما فرديان معا.

إذن : $p=2a+1$ و $q=2b+1$ حيث $(a,b)\in IN^2$

$$n\left(q^2-p^2\right)=2p^2 \Rightarrow n\left(4b^2+4b+1-4a^2-4a-1\right)=2p^2 \Rightarrow 2n\left(b^2+b-a^2-a\right)=p^2$$

إذن p زوجي و هذا يناقض كونه فرديا

- إذا كان n زوجيا فإن $n=2m$ حيث $m\in IN^*$

إذن: $n\left(q^2-p^2\right)=2p^2 \Rightarrow m\left(q^2-p^2\right)=p^2 \Rightarrow m\left(q^2-p^2\right)=p^2-q^2+q^2 \Rightarrow \left(q^2-p^2\right)(m+1)=q^2$

من $m\left(q^2-p^2\right)=p^2$ و $\left(q^2-p^2\right)(m+1)=q^2$ نستنتج أن $\left(q^2-p^2\right)$ قاسم مشترك لـ p^2 و q^2

سنبرهن الآن أن : $p \wedge q = 1 \Rightarrow p^2 \wedge q^2 = 1$

إذا كان p و q أوليين فيما بينهما فإن تفكيكهما الأولي لا يحتوي على أي عدد أولي مشترك عندما نحسب مربعيهما فإننا لن نجد أيضا أي عدد أولي مشترك، مما يعني أنهما أوليان فيما بينهما.

الآن بما أن $p \wedge q = 1$ فإن: $p^2 \wedge q^2 = 1$ و بما أن $(q^2 - p^2)$ قاسم مشترك موجب لهما فإن: $q^2 - p^2 = 1$

منه: $(q+p)(q-p) = 1$ منه : $\begin{cases} q+p=1 \\ q-p=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2q=2 \\ 2p=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q=1 \\ p=0 \end{cases} \Rightarrow n(1-0)=0 \Rightarrow n=0$ و هذا يناقض $n \in IN^*$

في جميع الحالات نجد تناقضا، بالتالي افتراضنا غير صحيح، و منه: $\sqrt{\dfrac{n}{n+2}} \notin Q \quad \forall n \in IN^*$

تمرين صعب يتطلب الالمام بقواعد الحسابيات، يمكن حله بسهولة بالاعتماد على قواعد سيتم دراستها لاحقا في درس الحسابيات، لكنني آثرت إدراجه في هذه السلسلة لكونه يتضمن مجموعة من الأفكار يمكن استغلالها لحل تمارين مشابهة تعتمد في حلها على زوجية و فردية الأعداد الصحيحة الطبيعية و كذا الأعداد الأولية فيما بينها.

تمرين 3 : $H(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$

1) لدينا: $H(x) = x^5(x^3 - 1) + x^2 - x + 1$ و $H(x) = x^2(x^6 - x^3 + 1) + 1 - x$ (سؤال جد سهل)

2) لنبين أن : $H(x) > 0 \quad \forall x \in IR$

- إذا كان $x \geq 1$، فإن: $x^5(x^3 - 1) \geq 0$ ، و $x^2 - x + 1 > 0$ (لأن: $\Delta = -3 < 0$)
إذن : $H(x) = x^5(x^3 - 1) + x^2 - x + 1 > 0$
- إذا كان $x < 1$، فإن: $1 - x > 0$ ، و $x^6 - x^3 + 1 = (x^3)^2 - (x^3) + 1 > 0$ (لأن: $\Delta = -3 < 0$)
إذن : $H(x) = x^2(x^6 - x^3 + 1) + 1 - x > 0$

في جميع الحلات نستنتج أن : $H(x) > 0$

البرهان بفصل الحالات مفيد جدا في وضعيات كثيرة خصوصا إذا استطعنا إيجاد الحلات المناسبة و استغلال معطيات كل حالة على حدة.

تمرين 4 : لنحل المتراجحة $(E): \quad \sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \dfrac{1}{2}$

مجموعة صلاحية المتراجحة هي: $D = \{x \in IR / x+1 \geq 0 \ \ et \ \ 3-x \geq 0\} = [-1;3]$

$$(E) \Leftrightarrow \sqrt{3-x} > \frac{1}{2} + \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \sqrt{3-x} > \frac{1}{2} + \sqrt{x+1} \Leftrightarrow 3-x > \frac{1}{4} + \sqrt{x+1} + x + 1$$

$$(E) \Leftrightarrow \frac{7}{4} - 2x > \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7}{4} - 2x \geq 0 \\ \dfrac{49}{16} - 7x + 4x^2 > x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{7}{8} \\ 4x^2 - 8x + \dfrac{33}{16} > 0 \end{cases}$$

محددة الحدودية: $4x^2 - 8x + \dfrac{33}{16}$ هي: $\Delta = 64 - 33 = 31$ و جذراها هما: $x_1 = \dfrac{8+\sqrt{31}}{8}$ و $x_2 = \dfrac{8-\sqrt{31}}{8}$

و تكون موجبة خارج الجذرين. منه: $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{7}{8} \\ x < \dfrac{8-\sqrt{31}}{8} < \dfrac{7}{8} \quad ou \quad x > \dfrac{8+\sqrt{31}}{8} > \dfrac{7}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x < \dfrac{8-\sqrt{31}}{8}$

بالتالي: $\boxed{S = \left[-1; \dfrac{8-\sqrt{31}}{8}\right[}$

أثناء حل المتراجحات يجب استعمال التكافؤ لأنه بعكس المعادلات التحقق من صحة النتائج أمر غير يسير لأن الحلول غالبا ما تكون مجالات، كما أنه يجب مراعاة مجموعة الصلاحية (ندعوها في الدوال مجموعة التعريف).

تمرين 5 : a و b و c قياسات أضلاع مثلث. لنبين أن : $a+b+c=1 \Rightarrow a^2+b^2+c^2<\frac{1}{2}$

لدينا a و b و c قياسات أضلاع مثلث إذن : $\begin{cases} a<b+c \\ b<a+c \\ c<a+b \end{cases}$ منه : $\begin{cases} a^2<ab+ac \\ b^2<ab+bc \\ c^2<ac+bc \end{cases}$

منه : $a^2+b^2+c^2<2(ab+ac+bc)$

منه : $a^2+b^2+c^2+a^2+b^2+c^2<a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$

منه : $2(a^2+b^2+c^2)<(a+b+c)^2$ منه : $2(a^2+b^2+c^2)<1$ بالتالي : $a^2+b^2+c^2<\frac{1}{2}$

هذا التمرين يتضمن معلومتين أساسيتين يجهلهما كثير من التلاميذ، الأولى المتعلقة بأضلاع مثلث و الثانية المتطابقة الهامة : $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$

تمرين 6 :

1) لنبين بالترجع أن : $n(n+1)(n+2)$ مضاعف للعدد 6 حيث $n\in IN$

- بالنسبة لـ $n=0$ العبارة صحيحة لأن 0 مضاعف لـ 6
- نفترض أن $n(n+1)(n+2)$ مضاعف لـ 6 ، و لنبين أن $(n+1)(n+2)(n+3)$ مضاعف لـ 6

لدينا $n(n+1)(n+2)$ مضاعف لـ 6، إذن: $n(n+1)(n+2)=6a$ حيث $a\in IN$

و منه: $(n+1)(n+2)(n+3)=(n+3)(n+1)(n+2)=n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)=6a+3(n+1)(n+2)$

وبما أن جذاء عددين متتابعين هو عدد زوجي فإن: $(n+1)(n+2)=2b$ حيث $b\in IN$

منه: $(n+1)(n+2)(n+3)=6a+6b=6(a+b)$ و حيث أن: $(a+b)\in IN$

فإن : $(n+1)(n+2)(n+3)$ مضاعف لـ 6

2) لنبين بالترجع أن : $1+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n\in IN^*$

- بالنسبة لـ $n=1$ العبارة صحيحة لأن $1^2=1=\frac{1\times2\times3}{6}$
- نفترض أن $1+4+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ و لنبين أن $1+4+...+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$

لدينا

$$1+4+...+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{n+1}{6}(n(2n+1)+6(n+1))$$

$$=\frac{n+1}{6}(2n^2+n+6n+6)=\frac{(n+1)(2n^2+4n+3n+6)}{6}$$

$$=\frac{(n+1)(n+1)(2n(n+2)+3(n+2))}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

و هذا ينهي البرهان

3) لنبين بالترجع أن : 9 يقسم العدد 4^n+6n-1 حيث $n\in IN$

- بالنسبة لـ $n=0$ العبارة صحيحة لأن 9 يقسم $4^0+6\times0-1=0$
- نفترض أن 9 يقسم 4^n+6n-1 ، و لنبين أن 9 يقسم $4^{n+1}+6(n+1)-1$

لدينا 9 يقسم 4^n+6n-1 ، إذن: $4^n+6n-1=9a$ حيث $a\in IN$

$$4^{n+1}+6(n+1)-1=4(4^n)+6n+5=4(9a-6n+1)+6n+5$$

و منه: $=36a-24n+4+6n+5=36a-18n+9$

$$=9(4a-2n+1)$$

وبما أن : $a\in IN$ و $n\in IN$ فإن: $(4a-2n+1)\in Z$ ، إذن 9 يقسم $4^{n+1}+6(n+1)-1$

4) لنبين بالترجع أن : $\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+...+\dfrac{1}{n\times(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$ $\quad \forall n\in IN^*$

- بالنسبة لـ $n=1$ العبارة صحيحة $\dfrac{1}{1\times 2}=\dfrac{1}{1+1}$
- نفترض أن $\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+...+\dfrac{1}{n\times(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$ ونبين أن : $\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+...+\dfrac{1}{(n+1)\times(n+2)}=\dfrac{n+1}{n+2}$

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)}=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{n\times(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)}$$

لدينا : $=\dfrac{n}{n+1}+\dfrac{1}{(n+1)\times(n+2)}$

$$=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$$

- مبدأ الترجع من أساسيات البرهان الرياضي كلما تعلق الأمر بالأعداد الصحيحة الطبيعية
- هذا المبدأ يكون هو الوسيلة الوحيدة للبرهان في كثير من الحالات
- هناك أنواع أخرى للترجع لا نستعملها إلا نادرا (في أولمبياد الرياضيات أو ربما في الفروض المنزلية) أذكر منها مبدأ **الترجع القوي** و **الترجع المزدوج**.
- أثناء الافتراض في الترجع نحذف المكمم الكوني لأننا بصدد التعامل مع حالة من حالات العبارة المراد البرهان على صحتها.

تمرين 7 :

1) a و b عددينان حقيقيان حيث $|a-b|<\varepsilon$ $\quad \forall\varepsilon>0$ ، لنبين أن : $a=b$

لنفترض أن $a\neq b$ إذن $a-b\neq 0$ إذن : $|a-b|>0$ منه : $\dfrac{|a-b|}{2}>0$

الآن حسب المعطيات نأخذ: $\varepsilon=\dfrac{|a-b|}{2}$ فنجد : $|a-b|<\dfrac{|a-b|}{2}$ منه : $2|a-b|<|a-b|$ منه $|a-b|<0$

و هذا غير ممكن ، بالتالي : $a=b$

2) ليكن $n\in IN$ ، لنبين أن : $\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1}\in IN$

لدينا :

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=n(n+3)(n+1)(n+2)+1=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1$$

$$=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1=(n^2+3n+1)^2$$

بالتالي : $\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1}=n^2+3n+1\in IN$

3) لنبين أن $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\notin IN$ $\quad \forall n\in IN^*$

نفترض أن : $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\in IN$ $\quad \exists n\in IN$ ، إذن : $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}=a$ حيث $a\in IN$

منه : $n+2\sqrt{n(n+1)}+n+1=a^2$ منه : $2\sqrt{n(n+1)}=a^2-2n-1$

نضع : $a^2-2n-1=b$ إذن : $2\sqrt{n(n+1)}=b$ و $b\in IN$

منه: $4n^2+4n=b^2$ منه : $4n^2+4n+1=b^2+1$ منه: $(2n+1)^2=b^2+1$ منه: $(2n+1)^2-b^2=1$

منه : $(2n+1+b)(2n+1-b)=1$ منه : $\begin{cases}2n+1+b=1\\2n+1-b=1\end{cases}$ منه : $4n+2=2$ منه $n=0$ وهذا يناقض $n\in IN^*$

بالتالي : $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\notin IN$ $\forall n\in IN^*$