التمرين 1:

عناصر الأجوبة:

1. العبارة $\sqrt{2} \in Q$ خاطئة بالطبع !

و إلا، يمكن كتابة $\sqrt{2}$ على شكل $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ بحيث a و b عددان صحيحان طبيعيان أوليان فيما بينهما.

إذن $2b^2 = a^2$ أي أن a عدد زوجي و نكتب $a = 2k$ بحيث k عدد صحيح طبيعي.
إذن $2b^2 = 4k^2$ أي $b^2 = 2k^2$.
إذن b هو أيضا عدد زوجي و نكتب $b = 2h$ بحيث h عدد صحيح طبيعي.
إذن a و b يقبلان القسمة على 2 و هذا تناقض مع كونهما عددان أوليان فيما بينهما.

2. العدد 1419 يقبل القسمة على 11 عبارة صحيحة لأن 129x11=1419.
(لاحظ أن $11 = 1 - 4 + 1 - 9$. هناك أيضا برهان لقابلية قسمة عدد على 11 كما هو الشأن بالنسبة لقابلية القسمة على 3، فما هو هذا البرهان؟)

3. العدد 211 أولي عبارة صحيحة.

باقي القسمة r	خارج القسمة q	p^2	عدد أولي p
1	105	4	2
1	70	9	3
1	42	25	5
1	30	49	7
2	19	121	11
3	16	169	13
		289	17

4. $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = 1 - \sqrt{3}$ عبارة خاطئة باعتبار إشارتي العددين !

5. $\frac{1}{\sqrt{97 - 56\sqrt{3}}} = 7 + 4\sqrt{3}$ عبارة صحيحة.

(تحقق أولا من أن $97 - 56\sqrt{3}$ عدد موجب قطعا، ثم ارفع العددين إلى المربع و ...)

6. $\sqrt{36 - 9\sqrt{5}} \prec \sqrt{9 - 5\sqrt{2}}$ عبارة خاطئة.

(تحقق أولا من إشارة العددين $9 - 5\sqrt{2}$ و $36 - 9\sqrt{5}$ ثم ارفعهما الى المربع و ...)

التمرين 2:

عناصر الأجوبة:

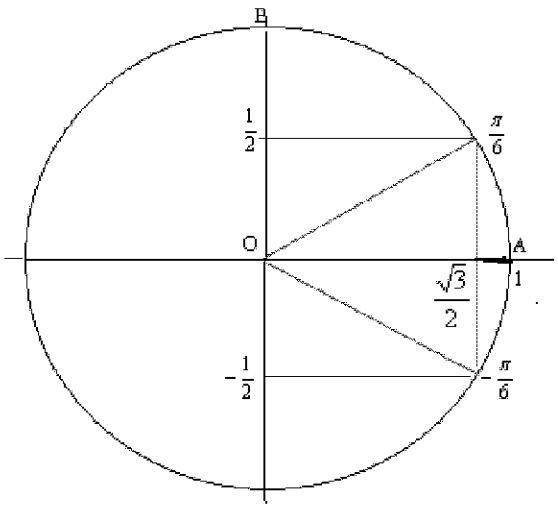
مجموعة القيم x التي من أجلها تكون الدالة العبارية صحيحة هي مجموعة الحلول للمعادلة أو المتراجحة بحسب السؤال.

1. $\left\{-1; \frac{7}{2}\right\}$
2. $]-\infty; -1[\cup \left]\frac{-5}{7}; +\infty\right[$
3. $\left]3; \frac{9}{2}\right[$
4. $]-\infty; 3[\cup]3; 5[$ (احسب الفرق ثم أنشر و عمل للحصول على $(x-5)(x-3)^2 < 0$ ...)

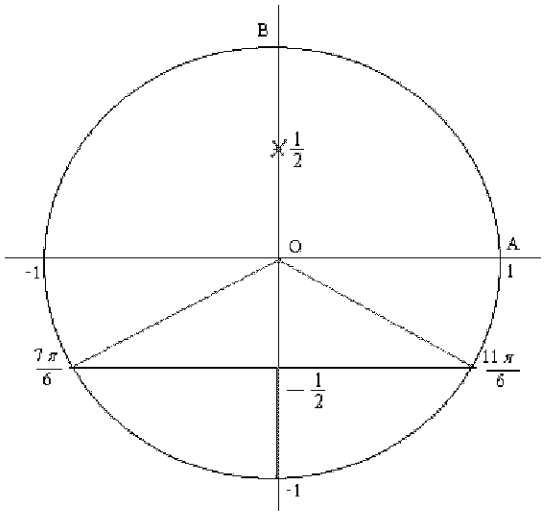
التمرين 3:

عناصر الأجوبة:

1. العبارة المكممة $(\forall x \in]-6; 3[: x^2 + 3x < 18)$ صحيحة لأن $x^2 + 3x - 18 = (x-3)(x+6)$.
2. العبارة المكممة $(\forall x \in]4; +\infty[: x^2 + 2x > 24)$ صحيحة لأن $x^2 + 2x - 24 = (x-4)(x+6)$.
3. العبارة المكممة $(\exists x \in R / x^2 - x < 2)$ صحيحة (نأخذ مثلا $x = 0$)
4. العبارة المكممة $(\exists x \in R / \frac{1}{x} < 0.0625\, x)$ صحيحة (نأخذ مثلا $x = 100$)
5.
6. العبارة المكممة $(\forall x \in R : x^2 + 1 < 2|x|)$ خاطئة (خذ مثالا مضادا مثلا $x = 0$)
7. العبارة المكممة $(\forall x \in \left]-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right[: 2\cos x > \sqrt{3})$ صحيحة



8. العبارة المكممة $(\forall x \in \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right] : 2\sin x < 1)$ صحيحة



التمرين 4:

1.العبارة المكممة $(\forall x \in R)(\exists y \in R) / x \le y$ صحيحة (خذ مثلا $y = x+1$)

2.العبارة المكممة $(\exists y \in R) / (\forall x \in R) : x \le y$ خاطئة لأن نفيها $(\forall y \in R)\ (\exists x \in R) : x > y$ عبارة صحيحة (خذ مثلا $x = y+1$)

التمرين 5:

عناصر الأجوبة:

1. العبارة $[\cos(\frac{38\pi}{3}) = -0.5)$ و $(\sin(\frac{28\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2})]$ خاطئة، لأن $\sin(\frac{28\pi}{3}) = \sin(8\pi + \pi + \frac{\pi}{3})$ و $\sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\sin(\frac{\pi}{3})$
2. $[(\forall x \in R) : x^2 + 1 > x)$ و$(\exists x \in R) / \sqrt{x+1} = x - 1]$ عبارة صحيحة لكون كلتي العبارتين صحيحة (يمكن كتابة العبارة الأولى $(\forall x \in R) : (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ و التحقق من أن للمعادلة $\sqrt{x+1} = x - 1$ حل حقيقي)

التمرين 6:

عناصر الأجوبة:

1. $[(\forall x \in R) : x^2 > x)$ و$(\exists x \in R) / \frac{1}{x} = x + 2]$ عبارة صحيحة لكون إحدى العبارتين صحيحة (قم بحل المعادلة $(x \in R); \frac{1}{x} = x + 2$)
2. $[(\exists n \in N) / \frac{10}{n} = n + 2)$ أو $(\forall n \in N) : n^2 < n + 1000)]$ عبارة خاطئة لكون كلتي العبارتين خاطئة ($(\exists n \in N) / \frac{10}{n} = n + 2)$ خاطئة لأن 11 ليس مربعا كاملا و $(\forall n \in N) : n^2 < n + 1000)$ خاطئة أيضا باعتبار مثال مضاد، خذ مثلا $n = 1000$)

التمرين 7:

عناصر الأجوبة:

1. $[(\forall x \in R) : x > 1 \Rightarrow x^2 > x]$ عبارة صحيحة
2. $[(\forall x \in R) : x < -2 \Rightarrow |x| < 2]$ عبارة خاطئة (مثال مضاد: $x = -36$)
3. $[(\forall x \in R)(\forall y \in R) : x^2 > y^2 \Rightarrow x > y]$ عبارة خاطئة (مثال مضاد: y = -1 و $x = -2$)
4. $[(\forall x \in R) : x \le -1 \Rightarrow (x+1)^2 \ge 0]$ عبارة صحيحة
5. $[(\forall x \in R)(\forall y \in R) : x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y]$ عبارة خاطئة (مثال مضاد: y = -1 و $x = 1$)
6. $[(\forall x \in R)(\forall y \in R) : |x| = |y| \Leftrightarrow (x = y$ أو $x = -y)]$ عبارة صحيحة
7. $[(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in R) : (0 < x < \alpha) \Rightarrow (1 < \sqrt{1+x} < 1 + \varepsilon)]$ عبارة صحيحة (خذ مثلا $\alpha = \varepsilon$ أو أي عدد موجب قطعا و أصغر من $2\varepsilon + \varepsilon^2$)

التمرين 8:

العبارات التالية صحيحة (راجع دفتر دروسك):

1. $(P$ و $Q) \Leftrightarrow (Q$ و $P)$ (تبادلية و)
2. $(P$ أو $Q) \Leftrightarrow (Q$ أو $P)$ (تبادلية أو)
3. $((R$ و $Q)$ و$P) \Leftrightarrow (R$ و$(Q$ و $P))$ (تجميعية و)
4. $((R$ أو $Q)$ أ و$P) \Leftrightarrow (R$ أو $(Q$ أو $P))$ (تجميعية أو)
5. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q)$ و $(Q \Rightarrow P))$ (تعريف تكافؤ عبارتين)
6. $((R$ أو $Q)$ و $P) \Leftrightarrow ((R$ و $P)$ أو $(Q$ و $P))$ (توزيعية و على أو)
7. $((R$ و $Q)$ أو $P) \Leftrightarrow ((R$ أو $P)$ و $(Q$ أو $P))$ (توزيعية أو على و)
8. $(P$ و $Q) \Rightarrow P$ (ننطلق من $(P$ و $Q)$ صحيحة و نستنتج P صحيحة.)
9. $P \Rightarrow (P$ أو $Q)$ (ننطلق من P صحيحة و نستنتج $(P$ أو $Q)$ صحيحة.)
10. $((P \Rightarrow Q)$ و $(Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ (الاستلزام علاقة متعدية)
11. $((P \Rightarrow Q)$ و $(P \Rightarrow R)) \Leftrightarrow (P \Rightarrow (Q$ و $R))$ (نبين الاستلزام المباشر ثم العكسي)
12. $(Q \Leftrightarrow R) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R))$ (للبرهنة على تكافؤ العبارتين $(P \Rightarrow R)$ و $(P \Rightarrow Q)$ نبين الاستلزام المباشر ثم العكسي مع افتراض أن $(Q \Leftrightarrow R)$ عبارة صحيحة)
13. $\overline{P$ و $Q} \Leftrightarrow (\overline{P}$ أو $\overline{Q})$ (قانون موركان)

14. $(\overline{P}$ و $\overline{Q}) \Leftrightarrow \overline{P \text{ أو } Q}$ (قانون موركان)
15. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ (الاستلزام المضاد للعكس، نستعمل تعريف الاستلزام ثم نفي النفي)

التمرين 9:

عناصر الأجوبة:

1. نفي العبارة $(\forall x \in R : |x| \geq x)$ هو العبارة:
$(\exists x \in R / |x| < x)$ و هذه الأخيرة خاطئة لأن الأولى صحيحة (تذكر تعريف القيمة المطلقة لعدد)
2. نفي العبارة $(\exists x \in R \ / \sin x = x)$ هو العبارة:
$(\forall x \in R : \sin x \neq x)$ و هذه الأخيرة خاطئة لأن الأولى صحيحة (لا تنسى أن $\sin 0 = 0$)
3. نفي العبارة $(\forall x \in R : |x| = x$ أو $|x| = -x)$ هو العبارة:
$(\exists x \in R / |x| \neq x$ و $|x| \neq -x)$ و هذه الأخيرة خاطئة لأن الأولى صحيحة (تذكر تعريف القيمة المطلقة لعدد)
4. نفي العبارة $(\exists x \in R \ / \sqrt{x} = -x$ و $x^2 = x)$ هو العبارة:
$(\forall x \in R : x^2 \neq x$ أو $\sqrt{x} \neq -x)$ و هذه الأخيرة خاطئة لأن الأولى صحيحة (خذ $x = 0$)
5. نفي العبارة $(\exists x \in R \ / \ 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq x)$ هو العبارة: $(\forall x \in R : 0 \leq x \leq 1$ و $x^2 > x)$ و هذه الأخيرة خاطئة لأن الأولى صحيحة (خذ مثلا $x = 0$)

في انتظار تحرير عناصر الإجابة للتمارين المتبقية...

التمرين 10:

ليكن x من R ، بين أن:

1. $x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2$
2. $|x^2 + x - 2| > 10 \Rightarrow |x - 1| > 2$
3. $x \neq 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{|x|} > 0$
4. $x \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} \neq 1 + \frac{x^2}{2}$

التمرين 11:

ليكن x و y من R ، بين أن:

1. $1 + xy = x + y \Rightarrow (x = 1 \quad$ أو $\quad y = 1)$
2. $(\frac{x}{1+x^2} = \frac{y}{1+y^2}$ و $x > 1$ و $y > 1) \Rightarrow x = y$
3. $(x > 0$ و $y > 0$ و $x^2 + y^2 = 4) \Rightarrow (2 \leq x + y \leq 2\sqrt{2})$
4. $(x \neq y$ و $x + y \neq 2) \Rightarrow x^2 - 2x \neq y^2 - 2y$
5. $\frac{x^2 + y^2}{2} = xy \Leftrightarrow x = y$
6. $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1 \Leftrightarrow x + y = 0$

التمرين 12:

ليكن x و y من R بحيث $y \geq 4$ و $x \geq 1$ ، بين أن:
$(2\sqrt{x-1} + 4\sqrt{y-4} = x + y) \Leftrightarrow (x = 2 \quad$ و $\quad y = 8)$

التمرين 13:

ليكن x و y من R بحيث $x \neq y$ ، بين أن:
$((x+y)^3 \leq 4x^3 + 4y^3) \Leftrightarrow (x + y \geq 0)$

التمرين 14:

ليكن x و y عددين حقيقيين موجبين ، بين أن:
$\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} \leq 2(x + y + 1)$

التمرين 15:

حل في R المعادلات التالية:

1. $\sqrt{1 + 3x^2} = 2x$
2. $\sqrt{5x - 6} = -x$
3. $\sqrt{-2 - 6x} = x - 1$
4. $\sqrt{1+x} - \sqrt{9-x} = x - 2$
5. $E(3x + 1) = 5x - 1$
6. $|1 + x| - |9 - x| = x - 2$

التمرين 16:

حل في R المتراجحات التالية:

1. $\sqrt{1 - x + x^2} > x - 2$
2. $\sqrt{x^2 - 3x} > 2$
3. $\sqrt{1 + x + x^2} + \sqrt{1 - x + x^2} > \sqrt{2}(|x| - 1)$

التمرين 17:

بين أن العبارات التالية خاطئة:

1. لكل عدد طبيعي صحيح n ، العدد $2^n - 1$ يقبل القسمة على 3.
2. المستقيمان $(D): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \end{cases}$ و $(\Delta): \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$ منطبقان.
3. $\forall (x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 > 0$

.

التمرين 18:

بين أن العبارات التالية صحيحة:

1. لكل عدد طبيعي صحيح n ، العدد 4^n+6n-1 يقبل القسمة على 9.
2. لكل عدد طبيعي صحيح n ، العدد $n(n+8)(n+13)$ يقبل القسمة على 6.
3. لكل عدد طبيعي صحيح n ، العدد $3^{2n+1}+2^{n+2}$ يقبل القسمة على 7.
4. $(\forall n\in N^*):1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$
5. $(\forall n\in N):1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$
6. $(\forall n\in N^*):1+8+27+...+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$
7. $(\forall n\in N^*):\dfrac{1}{1x2}+\dfrac{1}{2x3}+\dfrac{1}{3x4}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$

التمرين 19:

ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعا.

1. بين بالترجع أن: $(\forall n\in N):(1+x)^n\geq 1+nx$
2. أستنتج أن: $(\forall n\in N):(1+n)^n\geq 2n^n$

بالإضافة إلى التمارين و المسائل الواردة في " **المفيد في الرياضيات** " الآتية أرقامها: 7-10-11-14-21-38-43-44-60-63-65-67-82...