

التمرين ①

نعتبر الدالة $f(x) = \frac{x^2 + 1 - \cos x}{x + \sin x}$
 أ. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ب. بين أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{3}{4}$

ج. بين أن $\forall x > 1 : \frac{x^2}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{x^2+2}{x-1}$
 واستنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

د. بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$
 ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

التمرين ②

نضع $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x \cos x + 1}$

أ. بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}) |x - \cos x| \leq f(x)$

ب. بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ وحدد

ج. بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}^+) f(x) \leq x + 1$

ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

التمرين ③

نعتبر الدالة $f(x) = \frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right)$ حيث $a > 0$ و $b \neq 0$

أ. بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \frac{b}{a} - \frac{x}{a} < f(x) \leq \frac{b}{a}$

ب. حدد تأطير $f(x)$ من أجل $x < 0$

ج. استنتج أن $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \left| f(x) - \frac{b}{a} \right| \leq \frac{|x|}{a}$

ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

التمرين ④

1) حدد تبعاً لقيم العدد الحقيقي a النهاية التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{ax}{(x^2-1)^2}$$

2) أدرس حسب قيم a النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - ax$

التمرين ⑤

نعتبر الدالة $f_m(x) = \frac{x^3 + mx + 1}{x^2 + x}$ حيث $m \in \mathbb{R}$

أ. حدد D مجموعة تعريف الدالة f_m

ب. أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ج. أدرس حسب قيم m النهاية $\lim_{x \rightarrow -1} f_m(x)$

التمرين ⑥

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + (m+1)x - 3}{x^2 + x} & ; x < -1 \\ f(x) = \frac{-2x + b}{\sqrt{x^2 + 2} + 1} & ; x \geq -1 \end{cases}$$

أ. أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x)$

ب. ناقش حسب قيم m النهاية $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

ج. أحسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ ثم حدد العددين m, b

كي تقبل الدالة f نهاية منتهية في $x_0 = -1$

التمرين ⑦

أ. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(ax+1)^2 - 1}{x}$

ب. بين بالترجع أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(ax+1)^n - 1}{x} = na$ $a \in \mathbb{R}^*$

ج. استنتج $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(6x+1)^{167} + (15x-1)^{67}}{x}$

التمرين ⑧

نعتبر الدالة $f(x) = \frac{\sin x + E(x)}{x}$

أ. بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

ب. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

ج. بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) |f(x) - 1| \leq \frac{2}{x}$

ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

التمرين ⑨

أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\tan x} - \sqrt{\sin x}}{x^2 \sqrt{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \sqrt{\cos x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{7-x}}{\sqrt{2x+3} - \sqrt{15-2x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3} - x - 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{4-x}}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4} - 2}{\sqrt{x-1} - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x - \sqrt{x} + 1} - \sqrt{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{(1-x^2)\sqrt{x^2+2} + 2}{x^2 - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} E(x) = 1$$

بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} E(x) = 1$