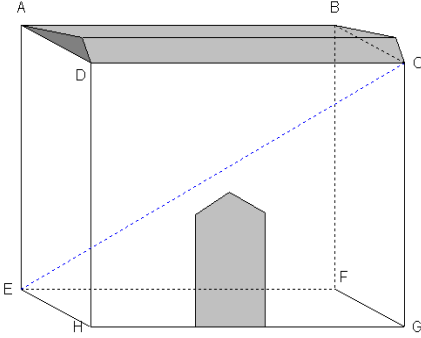


الهندسة الفضائية

نشاط تمهيدي

بمساعدة من بناء محترف تمكن محمد من بناء منزل على شكل متوازي المستطيلات أبعاده $GF = 3m$ و $HG = 6m$ و $CG = 4m$ (أنظر الشكل).



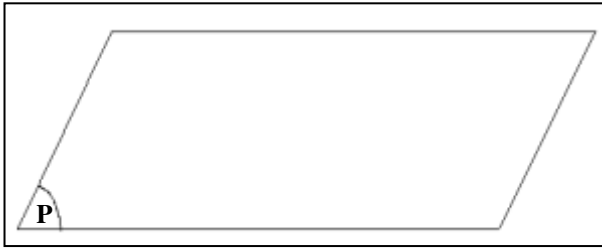
- 1 - حدد في الشكل المستقيمت المتوازية. علل جوابك .
- 2 - حدد في الشكل المستقيمت المتعامدة. علل جوابك .
- 3 - بين أن $EG^2 = FG^2 + HG^2$. ثم أحسب EG .
- 4 - بين أن $EC^2 = CG^2 + FG^2 + HG^2$. ثم أحسب EC .
- 5 - أحسب حجم متوازي المستطيلات $ABCDEFGH$.
- 6 - أراد علي أخ محمد تشييد منزل أبعاده تساوي ضعف أبعاد منزل محمد .
أ - ماهو حجم هذا المنزل ؟
ب - إستنتج العلاقة التي تجمع بين حجمي منزلي علي و محمد .

I. المستوى في الفضاء

تعريف 1

المستوى هو حيز من الفضاء محدد بمستقيمين متقاطعين أو مستقيمين متوازيين أو مستقيم و نقطة خارجه أو ثلاثة نقط غير مستقيمية .

1 - تمثيل مستوي

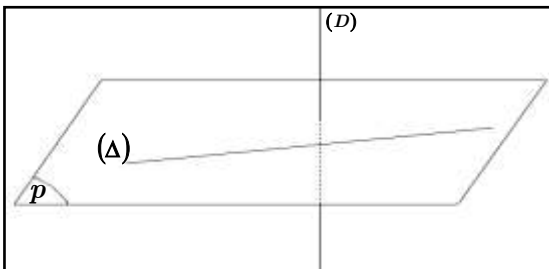


غالبا ما نمثل مستوا (P) بواسطة متوازي الأضلاع كما يوضح الشكل جانبه .

2- الأوضاع النسبية لمستقيمين في الفضاء.

أ - المستقيمان الغير مستوائيان .

تعريف 2



نقول إن مستقيمين (D) و (A) غير مستوائيين إذا كانا لا يوجدان ضمن نفس المستوى. في الشكل جانبه المستقيمان (D) و (A) غير مستوائيان

ب - المستقيمان المستويان .

تعريف 3

المستقيمان المستويان هما مستقيمان يوجدان ضمن نفس المستوى .

الأوضاع النسبية لمستقيمين في المستوى

(D) و (Δ) متطابقان	(D) و (Δ) متقاطعان	(D) و (Δ) متوازيان
و نكتب $(D) \equiv (\Delta)$.	و نكتب $(D) \cap (\Delta) = \{A\}$.	و نكتب $(D) \parallel (\Delta)$.

3- الأوضاع النسبية لمستقيم و مستوى في الفضاء

(P) مستوا و (D) مستقيما من الفضاء .

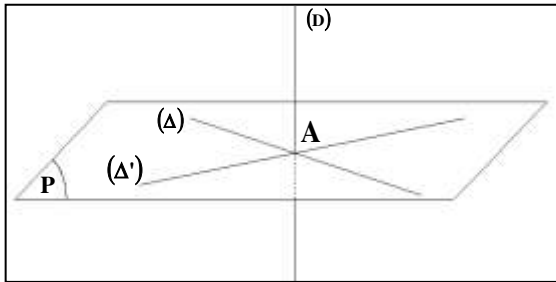
(D) يوازي (P)	(D) يخترق (P)	(D) ضمن المستوى (P)
و نكتب $(D) \parallel (P)$	و نكتب $(D) \cap (P) = \{A\}$	و نكتب $(D) \subset (P)$

4- تعامد مستقيم و مستوى

تعريف 4

يكون مستقيم (D) عموديا على مستوا (P) في نقطة A إذا كان عموديا في النقطة A على مستقيمين من المستوى (P) متقاطعين في النقطة A .

بتعبير آخر



إذا كان $(D) \perp (\Delta)$ و $(D) \perp (\Delta')$ و (Δ) و (Δ') ضمن المستوى (P) فإن $(D) \perp (P)$ (أنظر الشكل جانبه)

خاصية 1

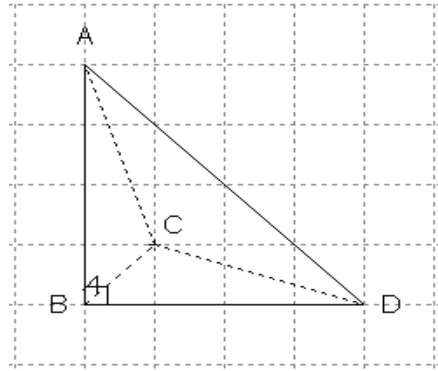
إذا كان (D) مستقيما عموديا على المستوى (P) فإنه عمودي على جميع المستقيمات الموجودة ضمن المستوى (P)

تطبيق 1

الحل

. لنبين أن $(AB) \perp (BI)$.
 لدينا $(AB) \perp (BC)$
 و $(AB) \perp (BD)$.
 و بما أن (BC) و (BD) مستقيمان
 متقاطعان ضمن المستوى (BCD) .
 فإن $(AB) \perp (BCD)$
 ولدينا I منتصف $[CD]$ إذن
 $I \in [DC] \subset (BCD)$
 ومنه (BI) ضمن المستوى (BCD) .
 و بالتالي $(AB) \perp (BI)$.

نعتبر الشكل أسفله بحيث $(AB) \perp (BC)$
 و $(AB) \perp (BD)$.
 لنكن I منتصف $[CD]$.
 بين أن $(AB) \perp (BI)$.



5- توازي مستقيم و مستوى

تعريف 5

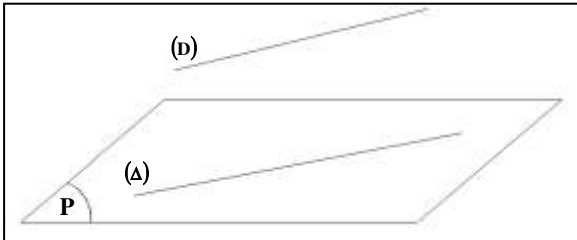
نقول إن مستقيما (D) يوازي مستوى (P) إذا كان لا يشتركان في أية نقطة

خاصية 2

إذا وازى مستقيم (D) مستقيما (Δ) يوجد ضمن مستوى (P) فإن (D) يوازي (P)

بتعبير آخر

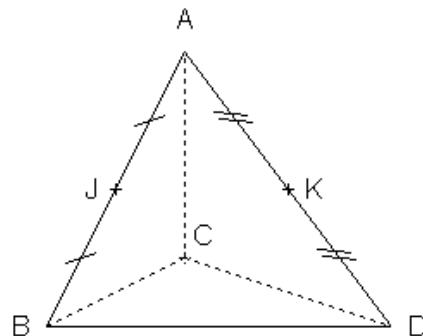
إذا كان $(\Delta) \subset (P)$ و $(D) \parallel (\Delta)$
 فإن $(D) \parallel (P)$
 (أنظر الشكل جانبه)



تطبيق 1

. بين أن $(JK) \parallel (CBD)$.
 نعتبر المثلث ABD .
 لدينا J منتصف $[AB]$
 و K منتصف $[AD]$.
 (المستقيم المار من منتصفي ضلعين في مثلث
 يوازي حامل الضلع الثالث).
 إذن $(JK) \parallel (BD)$
 و بما أن $(BD) \subset (BCD)$.
 فإن $(JK) \parallel (CBD)$.

نعتبر الشكل أسفله بحيث J منتصف $[AB]$
 و K منتصف $[AD]$.
 بين أن $(JK) \parallel (CBD)$.



6- تطبيقات

أ- مبرهنة فيثاغورس

خاصية 3

ABC مثلث قائم الزاوية في A يعني $BC^2 = AC^2 + AB^2$.

تطبيق 3

تكافئ $2BC^2 = 144$
 يكافئ $\frac{1}{2} \times 2BC^2 = \frac{1}{2} \times 144$
 يكافئ $BC^2 = 72$
 وبما أن $BC > 0$
 فإن $BC = \sqrt{72} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{2}$
 لنحسب المسافة SC.

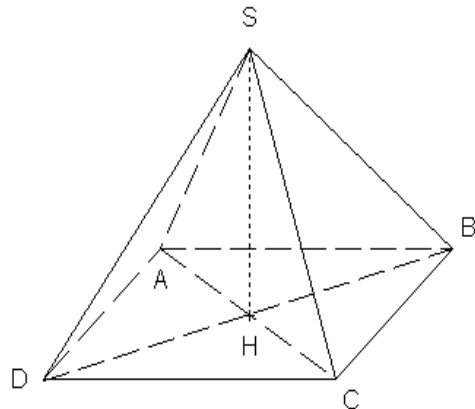
لدينا [SH] إرتفاع الهرم SABCD
 إذن [SH] عمودي على مستوى القاعدة
 ABCD في H
 وبما أن $(HC) \subset (ABCD)$ فإن
 $(SH) \perp (HC)$

ومن المثلث SHC القائم الزاوية في H
 حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة لدينا

$SH^2 + HC^2 = SC^2$
 ت . ع $12^2 + 6^2 = SC^2$
 يكافئ $144 + 36 = SC^2$
 يكافئ $180 = SC^2$
 وبما أن $SC > 0$ فإن

$SC = \sqrt{180} = \sqrt{6^2 \times 5} = 6\sqrt{5}$

الشكل جانبه يمثل هرما منتظما SABCD إرتفاعه [SH] وقاعدته ABCD عبارة عن مربع بحيث
 : $SH = 12\text{cm}$ و $AC = BD = 12\text{cm}$
 احسب BC و SC.

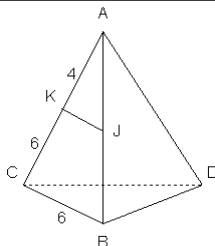


الحل

لنحسب المسافة BC
 نعتبر المثلث ACB قائم الزاوية في B (لأن
 الرباعي ABCD مربع)
 حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة
 $BC^2 + AB^2 = AC^2$
 يكافئ $BC^2 + BC^2 = AC^2$ ($AB = BC$)
 لأن الرباعي ABCD مربع)
 تكافئ $2BC^2 = AC^2$ ت . ع

ب $12^2 = 2BC^2$ طاليس

مثال :



نعتبر الشكل جانبه بحيث $(KJ) \parallel (CB)$ و $AK = 4$ و $KC = 6$ و $CB = 6$
 1. أحسب المسافة KJ .
 2. I نقطة من [BC] بحيث $CI = 2,4$. بين أن $(JI) \parallel (AC)$.

2. لنبين أن $(JI) \parallel (AC)$.

نعتبر المثلث ABC

لدينا $\frac{CI}{CB} = \frac{2,4}{6} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$

و $\frac{AJ}{AB} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

ومنه $\frac{AJ}{AB} = \frac{CI}{CB} = \frac{2}{5}$

وبما أن $I \in [BC]$ و $J \in [AB]$ فإن النقط A و J و I و B في نفس ترتيب النقط C و I و B و J وبالتالي حسب مبرهنة طاليس العكسية:

$(JI) \parallel (AC)$

1. لنحسب KJ

نعتبر المثلث ABC

لدينا $(KJ) \parallel (CB)$

حسب مبرهنة طاليس المباشرة:

لدينا $\frac{AK}{AC} = \frac{AJ}{AB} = \frac{KJ}{BC}$

ت.ع $\frac{4}{10} = \frac{AJ}{AB} = \frac{KJ}{6}$

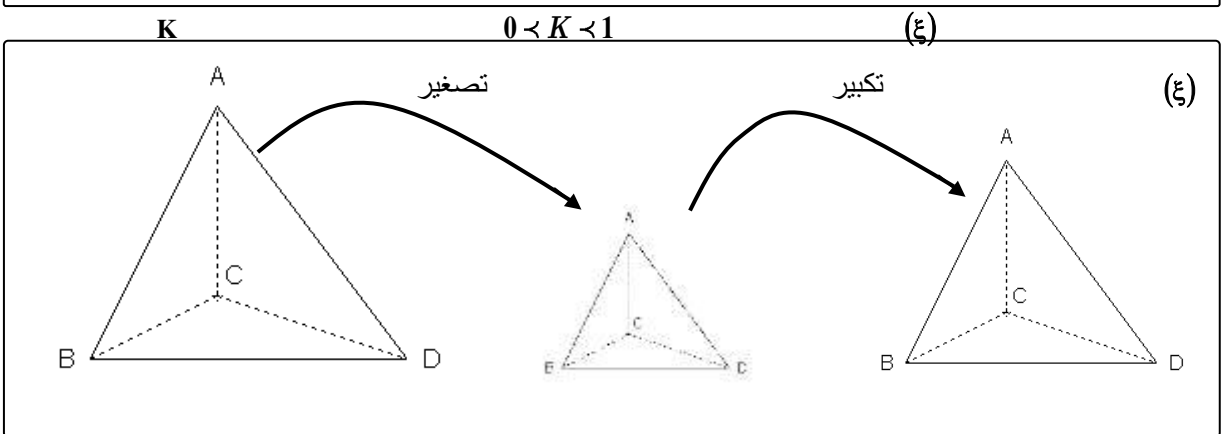
من العلاقة $\frac{4}{10} = \frac{KJ}{6}$ نستنتج أن

$KJ = 2,4$ ومنه $KJ = \frac{4}{10} \times 6$

II. التكبير و التصغير .

تعريف 6

(ع) مجسم معلوم في الفضاء .
بضرب أبعاد المجسم (ع) في نفس العدد الحقيقي K الأكبر من 1 نقول أننا قمنا بتكبير نسبته K للمجسم (ع).



1- أثر التكبير و التصغير على المساحة

خاصية 4

A و B شكلان هندسيان مساحتهما هما على التوالي S و S' .
إذا كان A تكبيراً (تصغيراً) نسبته K للشكل B فإن $S' = K^2 S$.

تطبيق 4

الحل

. لنحسب S' مساحة $A'B'C'D'$.
 لدينا $A'B'C'D'$ تكبير ال $ABCD$ نسبته K
 إذن $S' = K^2 S$
 ت . ع $S' = 3^2 \times 30 = 270 \text{ cm}^2$ تكافئ $S' = 9 \times 30 = 270$

$ABCD$ شبه منحرف مساحته $S = 30 \text{ cm}^2$
 علما أن $A'B'C'D'$ تكبير ال $ABCD$
 نسبته $K = 3$
 أحسب S' مساحة $A'B'C'D'$.

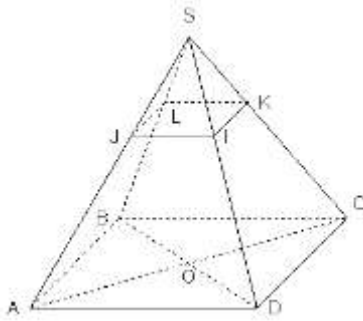
2- أثر التكرير و التصغير على الحجم

خاصية 5

A و B مجسمان من الفضاء حجميهما هما على التوالي V و V' .
 إذا كان A تكبيراً (تصغيراً) نسبته K للشكل B فإن $V' = K^3 V$.

تطبيق 5

الشكل جانبه يمثل هرمًا منتظمًا $SABCD$ إرتفاعه $[SO]$ وقاعدته $ABCD$ عبارة عن مربع بحيث
 $BC = 6 \text{ cm}$ و $SO = 4 \text{ cm}$ و I و J و K و L نقط على التوالي من $[SD]$ و $[SA]$
 $[SB]$ و $[SC]$ بحيث $SJ = SK = SI = SL = \frac{1}{3} SA$
 1 - بين أن $IJ = 2 \text{ cm}$.
 2 - علما أن الهرم $SABCD$ تكبيراً للهرم $SIKLJ$. حدد نسبته .
 3 - احسب حجم الهرم $SIKLJ$.
 4 . إستنتج V حجم المجسم $ABCDJLKI$.



الحل

من العلاقة $\frac{IJ}{AD} = \frac{1}{3}$ نستنتج أن $IJ = \frac{1}{3} AD$
 ت . ع $IJ = \frac{1}{3} \times 6 = 2 \text{ cm}$
 2 - علما أن الهرم $SABCD$ تكبيراً للهرم
 $SIKLJ$. حدد نسبته K
 لدينا الهرم $SABCD$ تكبيراً للهرم $SIKLJ$
 إذن قاعدة الهرم $SABCD$ تكبيراً لقاعدة
 الهرم $SIKLJ$
 ومنه الضلع $[AB]$ تكبيراً للضلع $[IJ]$
 و بالتالي $AB = K \times IJ$
 يكافئ $K = \frac{AB}{IJ} = \frac{6}{2} = 3$

1 . لنبين أن $IJ = 2 \text{ cm}$
 نعتبر المثلث ASD
 لدينا $SJ = \frac{1}{3} SA$ يعني $\frac{SJ}{SA} = \frac{1}{3}$
 و $SI = \frac{1}{3} SA = \frac{1}{3} SD$ يعني $\frac{SI}{SD} = \frac{1}{3}$
 ومنه $\frac{SJ}{SA} = \frac{SI}{SD} = \frac{1}{3}$
 بما أن $I \in [SD]$ و $J \in [SA]$ فإن النقط
 A و J و S في نفس ترتيب النقط D و I و
 S
 وبالتالي حسب مبرهنة طاليس العكسية $(JI) \parallel (AD)$
 حسب مبرهنة طاليس المباشرة :
 $\frac{SJ}{SA} = \frac{SI}{SD} = \frac{IJ}{AD} = \frac{1}{3}$

$48 = 27 \times V_{SIKIJ}$ يكافئ
 $\frac{1}{27} \times 48 = \frac{1}{27} \times 27 \times V_{SIKIJ}$ يكافئ
 $V_{SIKIJ} = \frac{48}{27} \text{cm}^3$ يكافئ
4. استنتج V حجم الجسم ABCDJLKI
 $V_{SABCD} = V + V_{SIKIJ}$ لدينا
 $V = V_{SABCD} - V_{SIKIJ}$ يكافئ
 $V = 48 - \frac{48}{27} = \frac{1296 - 48}{27} = \frac{1248}{27} \text{cm}^3$ ت . ع

3 - احسب حجم الهرم SIKIJ .
 لدينا الهرم SABCD تكبيراً للهرم SIKIJ
 نسبة $K = 3$
 إذن $V_{SABCD} = K^3 V_{SIKIJ}$
 $\frac{1}{3} \times SO \times AB^2 = 3^3 \times V_{SIKIJ}$ يكافئ
 $\frac{1}{3} \times 4 \times 6^2 = 3^3 \times V_{SIKIJ}$ ت . ع
 $\frac{1}{3} \times 4 \times 36 = 27 \times V_{SIKIJ}$ يكافئ

III. حساب الحجم .

المجسم	تعريفه	الحجم و المساحة الكلية
الموشور القائم	مجسم أوجهه الجانبية عبارة عن مستطيلات و له قاعدتان قابلتان للتطابق.	$V = B \times h$ $S = 2B + p \times h$ حيث B مساحة القاعدة و p محيط القاعدة
متوازي المستطيلات	موشور قائم له قاعدتان عبارة عن مستطيلين قابلان للتطابق.	$V = a \times b \times c$ $S = 2(ab + bc + ca)$
المكعب	موشور قائم كل أوجهه عبارة عن مربعات.	$V = a^3$ $S = 6a^2$
الهرم	مجسم فضائي أوجهه الجانبية عبارة عن مثلثات لها رأس مشترك يسمى رأس الهرم .	$V = \frac{Bh}{3}$ B : مساحة القاعدة h : إرتفاع الهرم
الأسطوانة القائمة	مجسم فضائي يولد عن دوران مستقيم حول مستقيم يوازيه له قاعدتان عبارة عن قرصان قابلان للتطابق	$V = Bh = \pi r^2 h$ $S = 2\pi r(r + h)$