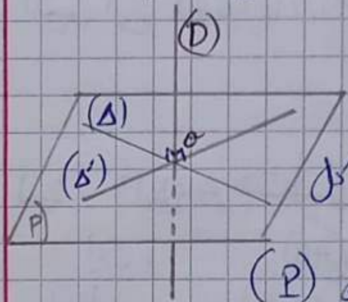
الدرس ⑧: الهندسة الفضائية

I- تعامد مستقيم ومستوى:

1) تعريف:

نقول أن مستقيم (D) عمودي على مستوى (P) في نقطة O إذا كان عموديا في النقطة O على مستقيمين ضمن (P) متقاطعين في O.

* الشكل الهندسي:



في الشكل: المستقيم (D) عمودي في النقطة O على كل المستقيمين (Δ) و (Δ') المتقاطعين ضمن المستوى (P)

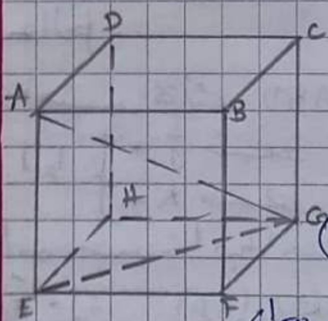
إذن: $(D) \perp (P)$

بتعبير آخر

* $(D)\perp(\Delta)$ و $(D)\perp(\Delta')$ في النقطة O
* (Δ) و (Δ') ضمن المستوى (P)

إذن: $(D)\perp(P)$

* مثال:



$ABCDEFGH$ مكعب

لنبين أن $(AE)\perp(EFGH)$

لدينا $ABEF$ و $ADHF$ مربعان

إذن

* (AE) عمودي على (EF) في E
* (AE) عمودي على (EH) في E
* (EF) و (EH) ضمن المستوى $(EFGH)$ ويتقاطعان في النقطة E

إذن حسب التعريف: $(AE)\perp(EFGH)$ في E

2) خاصية

أ- خاصية ①:

إذا كان المستقيم (D) عمودي على المستوى (P) في النقطة O، فإن المستقيم (D) عمودي على جميع المستقيمات التي توجد ضمن المستوى (P) والمارة من O

ب- مثال:

نعتبر المكعب $ABCDEFGH$ السابق

لنبين أن المثلث AEG قائم الزاوية في E

لدينا: $(AE)\perp(EFGH)$ في E

وبما أن المستقيم (EG) ضمن المستوى $(EFGH)$

ويقطع (AE) في E

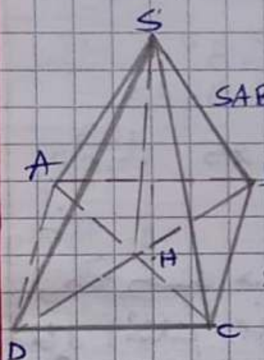
إذن حسب الخاصية ① فإن: $(AE)\perp(EG)$

وهذا يعني أن المثلث AEG قائم الزاوية في E

3) مبرهنة فيثاغورس في الفضاء:

أ- مبرهنة فيثاغورس المباشرة:

* مثال:



الشكل جانبه يمثل هرما منتظما $SABCD$ قاعدته عبارة عن مربع $ABCD$ وارتفاعه $[SH]$ بحيث

$SH = 12cm$ و $AC = BD = 12cm$

لنحسب BC و SC

⇐ حساب BC

$ABCD$ مربع إذن المثلث ABC قائم الزاوية في B

ومنه حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة فإن

$$BC^2 + AB^2 = AC^2$$

$$BC^2 + BC^2 = AC^2 \quad \text{(}AB=BC\text{ لأن } ABCD \text{ مربع)}$$

$$2BC^2 = AC^2$$

$$2BC^2 = 12^2$$

$$BC^2 = \frac{144}{2}$$

$$BC^2 = 72$$

ومنه: $BC = \sqrt{72} = \sqrt{6^2\times 2} = 6\sqrt{2}$

⇐ حساب SC

لدينا $[SH]$ ارتفاع الهرم $SABCD$

إذن $[SH]$ عمودي على مستوى القاعدة $ABCD$ في H

وبما أن (HC) ضمن $(ABCD)$

فإن: $(SH) \perp (HC)$
ومنه فإن المثلث SHC قائم الزاوية في H
ومنه حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فإن:

$$SH^2 + HC^2 = SC^2$$

لأن $HC = \frac{AC}{2}$ $SC^2 = 12^2 + 6^2$

$$SC^2 = 144 + 36$$

$$SC^2 = 180$$

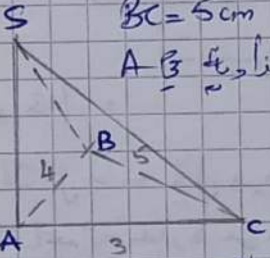
$$SC = \sqrt{180} = \sqrt{6^2 \times 5}$$

ومنه فإن: $SH = 6\sqrt{5}$

ب- مبرهنة فيتاغورس العكسية:

* مثال:

$SABC$ رباعي أوجه قاعدته المثلث ABC بحيث $AC = 3cm$ و $AB = 4cm$ و $BC = 5cm$
لنبين أن المثلث ABC قائم الزاوية في A



لدينا: $AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2$
$= 16 + 9 = 25$
ولدينا: $BC^2 = 5^2 = 25$
إذن: $AB^2 + AC^2 = BC^2$

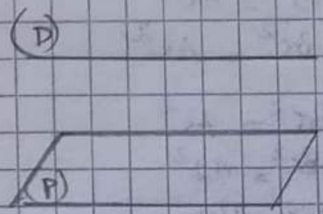
ومنه حسب مبرهنة فيتاغورس العكسية فإن المثلث ABC قائم الزاوية في $\hat{A}$

II- توازي مستقيم ومستوى في الفضاء:

1) تعريف:

نقول إن مستقيم (D) يوازي مستوى (P) إذا كانا لا يشتركان في أية نقطة.

* الشكل:



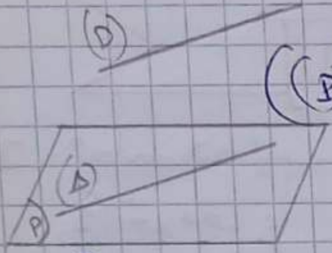
لدينا: $(D) // (P)$

2) خاصية ②

أ- خاصية ②:

(D) مستقيم و (P) مستوى في الفضاء.
يكون المستقيم (D) موازيا للمستوى (P) إذا كان يوجد ضمن (P) مستقيما موازيا للمستقيم (D)

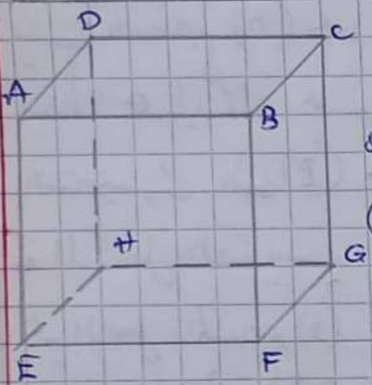
* الشكل:



$\left.\begin{array}{l} * \ (\Delta) \subset (P) \text{ ضمن } (\Delta) (P) \\ * \ (\Delta) // (D) \end{array}\right\}$

إذن $(D) // (P)$

ب- مثال:

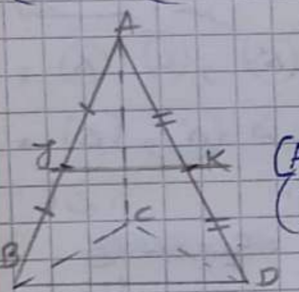


$ABCDEFGH$ متوازي المستطيلات
لنبين أن $(AB) // (EFGH)$

لدينا $ABEF$ مستطيل
إذن: $(EF) // (AB)$
ولدينا: $(EF) \subset (EFGH)$
إذن حسب الخاصية ②: $(AB) // (EFGH)$

ج- تمرين تطبيقي:

نعتبر الشكل جانبه بحيث J منتصف $[AB]$ و K منتصف $[AD]$
بين أن $(JK) // (BCD)$



* الحل:

نعتبر المثلث ABD
لدينا $\left.\begin{array}{l} * \ J \text{ منتصف } [AB] \\ * \ K \text{ منتصف } [AD] \end{array}\right\}$

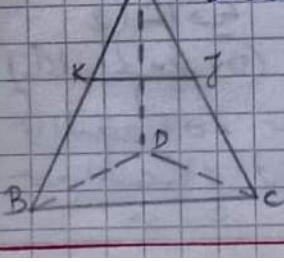
إذن حسب خاصية المستقيم المار من منتصفي
فإن: $(JK) // (BD)$
وبما أن: $(BD) \subset (BCD)$
فإنه حسب الخاصية ② فإن: $(JK) // (BCD)$

3) مبرهنة طاليس في الفضاء:

أ- الخاصية المباشرة:

* مثال:

نعتبر الهرم جانبه بحيث $(KJ) // (BC)$
و $AK = 2$ و $AB = 6$ و $BC = 9$
أحسب KJ



نعتبر المثلث ABC

لدينا $\begin{cases} * \ K\in[AB] \\ * \ J\in[AC] \end{cases}$ بحيث $(KJ)//(BC)$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة فإن:

$$\frac{AK}{AB}=\frac{AJ}{AC}=\frac{KJ}{BC}$$

إذن: $\frac{AK}{AB}=\frac{KJ}{BC}$

$$\frac{2}{6}=\frac{KJ}{9}$$

$$KJ=\frac{2\times 9}{6}=\frac{18}{6}$$

وبالتالي فإن: $KJ=3$

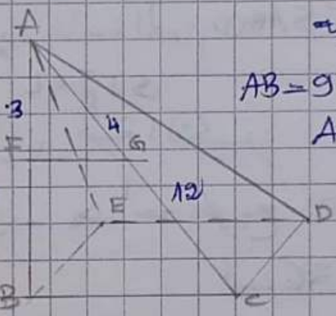
ب - الخاصية العكسية:

نعتبر الشكل جانبه

بحيث: $AB=9$ و $AF=3$

$AC=12$ و $AG=4$

بين أن $(FG)//(BC)$



لدينا: * $\frac{AF}{AB}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ و $\frac{AG}{AC}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

إذن: $\frac{AF}{AB}=\frac{AG}{AC}$

نعتبر المثلث ABC

لدينا * $F\in[AB]$ و * $G\in[AC]$ والنقط A و F و B لها نفس ترتيب النقط A و G و C

و $\frac{AF}{AB}=\frac{AG}{AC}$

إذن حسب مبرهنة طاليس العكسية فإن: $(FG)//(BC)$

III - التكبير والتصغير:

1) تعريف:

انطلاقا من شكل، نستخرج شكلا آخر بتكبيره أو تصغيره وذلك بضرب أبعاده في عدد حقيقي موجب k يخالف 1

2) ملاحظة:

* نحصل على شكل مكبر إذا كان $k>1$. نقول أننا قمنا بتكبير نسبته k.
* نحصل على شكل مصغر إذا كان $k<1$. نقول أننا قمنا بتصغير نسبته k.

* إذا كانت k هي نسبة التكبير $(k>1)$، فإن نسبة التصغير هي $\frac{1}{k}$.

3) أثر التكبير والتصغير على المساحات والحجوم:

أ- خاصية ③:

عند تكبير أو تصغير مجسم في الفضاء بنسبة k فإن:

← الأطوال تضرب في العدد k

← المساحات تضرب في العدد k^2

← الحجوم تضرب في العدد k^3

بتعبير آخر:

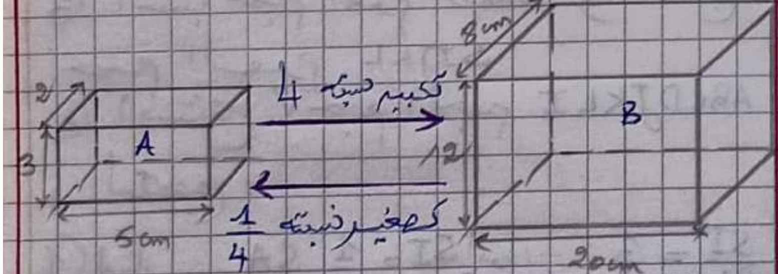
l: الطول S: المساحة V: الحجم

الشكل الأصلي	بعد تصغير أو تكبير نسبته k	الشكل المحصل عليه
l S V	$l'=k\times l$ $S'=k^2\times S$ $V'=k^3\times V$	l' S' V'

ب- مثال:

متوازي المستطيلات B هو تكبير لمتوازي المستطيلات A ونسبة التكبير هي 4

لأن الأطوال ضربت في 4



* مساحة A هي:

$$S=2(ab+ac+bc)=2(5\times3+5\times2+3\times2)$$
$$=2\times31$$
$$S=62\ cm^2$$

إذن مساحة B هي:

$$S'=k^2\times S=4^2\times 62$$
$$S'=992\ cm^2$$

* حجم A هو:

$$V = a\times b\times c = 5\times3\times2 = 30\,cm^3$$

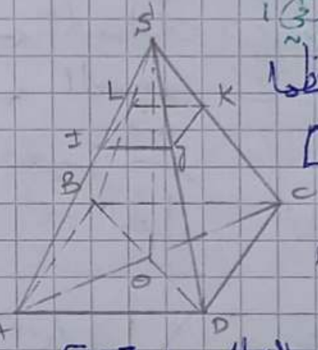
إذن حجم B هو:

$$V' = k^3\times V = 4^3\times 30 = 1920\,cm^3$$

* ملاحظة:

لتحديد نسبة التصغير أو التكبير، غالبا ما نستعمل مبرهنة طاليس المباشرة

4) تمرين تطبيقي:



الشكل جانبه يمثل هرما منتظما $SABCD$ ارتفاعه $[SO]$ وقاعدته $ABCD$ عبارة عن مربع بحيث: $BC = 6cm$ و $SO = 4cm$

I و J و K و L نقط على التوالي من $[SA]$ و $[SB]$ و $[SC]$ و $[SD]$ بحيث:

$$SI = SJ = SK = SL = \frac{1}{3}SA$$

1) بين أن: $IJ = 2cm$

2) علما أن الهرم $SABCD$ تكبير للهرم $SIJKL$

أ- حدد نسبته

ب- أحسب مساحة المربع $ABCD$ واستنتج مساحة المربع $IJKL$

3) أحسب حجم الهرم $SABCD$ واستنتج حجم الهرم $SIJKL$

4) استنتج V حجم الجسم $ABCDJKLI$

* التصحيح:

1) لدينا: $SI = \frac{1}{3}SA$ إذن: $\frac{SI}{SA} = \frac{1}{3}$

ولدينا: $SJ = \frac{1}{3}SA = \frac{1}{3}SD$ لأن: $SA = SD$ لأن $SABCD$ هرم منتظم

إذن: $\frac{SJ}{SD} = \frac{1}{3}$

ومنه فإن: $\frac{SI}{SA} = \frac{SJ}{SD} = \frac{1}{3}$

نعتبر المثلث ASD

لدينا: $\left.\begin{array}{l} * \; I \in [AS] \\ * \; J \in [DS] \end{array}\right\}$ والنقط A و I و S لها نفس ترتيب النقط D و J و S

ولدينا: $\frac{SI}{SA} = \frac{SJ}{SD}$

إذن حسب مبرهنة طاليس العكسية فإن

$$(IJ)//(AD)$$

ومنه حسب مبرهنة طاليس المباشرة فإن:

$$\frac{SJ}{SD} = \frac{SI}{SA} = \frac{IJ}{AD} = \frac{1}{3}$$

إذن: $\frac{IJ}{AD} = \frac{1}{3}$ أي $\frac{IJ}{6} = \frac{1}{3}$ $(AD = BC = 6cm)$

$$IJ = \frac{1}{3}\times 6$$

ومنه فإن: $IJ = 2\,cm$

2) أ- لدينا الهرم $SABCD$ تكبير للهرم $SIJKL$

إذن قاعدة الهرم $SABCD$ تكبير لقاعدة الهرم $SIJKL$

إذن نسبة التكبير $k = \frac{AD}{IJ} = \frac{6}{2} = 3$

ب- مساحة المربع $ABCD$ هي:

$$S = AB^2 = 6^2 = 36\,cm^2$$

ولدينا المربع $IJKL$ تصغير للمربع $ABCD$ ونسبة التصغير هي $\frac{1}{3}$

ومنه مساحة المربع $IJKL$ هي:

$$S' = k^2\times S = \left(\frac{1}{3}\right)^2\times 36 = \frac{36}{9}$$

$$S' = 4\,cm^2$$

3) حجم الهرم $SABCD$ هو:

$$V = \frac{1}{3}\times SO\times AB^2 = \frac{1}{3}\times 4\times 6^2 = 48\,cm^3$$

والهرم $SIJKL$ تصغير للهرم $SABCD$، ونسبة التصغير هي $\frac{1}{3}$

ومنه حجم الهرم $SIJKL$ هو:

$$V' = k^3\times V = \left(\frac{1}{3}\right)^3\times 48 = \frac{16}{9}\,cm^3$$

4) V حجم الجسم $ABCDJKLI$

لدينا

$$V_{SABCD} = V + V_{SIJKL}$$

ومنه

$$V = V_{SABCD} - V_{SIJKL} = 48 - \frac{16}{9} = \frac{432-16}{9} = \frac{416}{9}$$

$$V = \frac{416}{9}\,cm^3$$