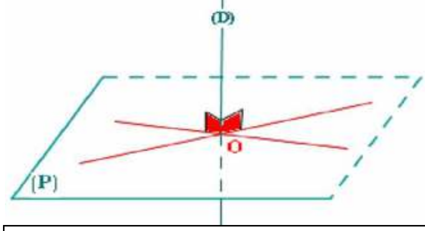
الهندسة الفضائية:حساب الحجوم – تكبير و تصغير

I. تعامد مستقيم و مستوى:

تعريف: يكون مستقيم (D) عموديا على مستوى (P) في نقطة O،إذا كان (D) عموديا على مستقيمين من (P) متقاطعين في O.

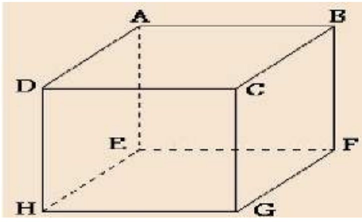
في الشكل جانبه: المستقيم (D) عمودي في النقطة O على المستقيمين (L) و(K) المتقاطعين ضمن المستوى (P)
إذن $(D)\perp(P)$



خاصية: إذا كان المستقيم (D) عموديا على المستوى (P) في النقطة O، فإن المستقيم (D) عمودي على جميع المستقيمات الواقعة ضمن المستوى (P) و المارة من O.

مثال: ABCDEFGH متوازي المستطيلات

1. بين أن $(CG)\perp(EFGH)$
2. استنتج أن $(CG)\perp(GE)$



التصحيح:

1. لدينا CGFB ....
إذن $(CG)\perp(....)$.

ولدينا CGHD .... إذن $(CG)\perp(....)$.

و بما أن (....) و (....) متقاطعان ضمن المستوى (.........)

إذن $(CG)\perp(.........)$.

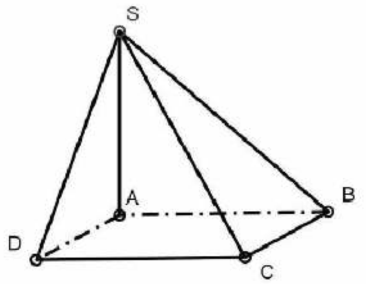
2. بما أن (CG) عمودي على المستوى (.........) و المستقيم (.....) موجود ضمن المستوى (.........) فإن $(CG)\perp(....)$.

تمرين:

SABCD هرم رباعي القاعدة
حيث المثلثان SAB و SAD
قائما الزاوية في A.

-1 بين أن $(SA)\perp(ABCD)$
ماذا نسمي المستقيم (SA)؟

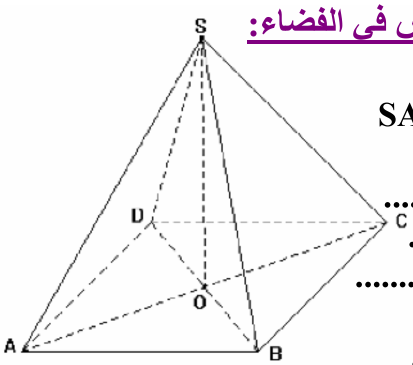
-2 استنتج أن $(SA)\perp(AC)$



II. تطبيق مبرهنة فيتاغورس في الفضاء:

نعتبر هرما منتظما SABCD
بحيث : SA= 5 و $AB = 3\sqrt{2}$

☻ لنحسب AC :
لدينا SABCD ....
إذن قاعدته ABCD ....
ومنه المثلث ....
إذن حسب مبرهنة فيتاغورس
....
ت.ع .... و منه AC =...............



☻ لنحسب SO : أولا نبين أن المثلث ASO قائم الزاوية في O

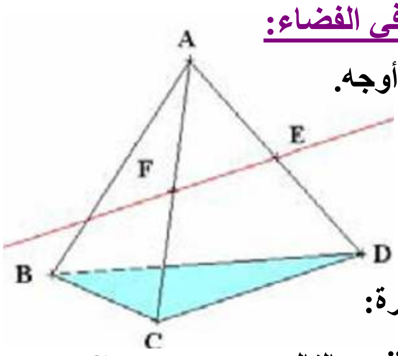
لدينا (SO) ارتفاع للهرم SABCD إذن $(SO)\perp(..........)$ و

بما أن $(..........)\subset(AO)$ فإن $(....)\perp(.....)$ و منه المثلث

ASOقائم الزاوية في O.إذن حسب مبرهنة فيتاغورس

.... ومنه ....

II. تطبيق مبرهنة طاليس في الفضاء:



في الشكل جانبه ABCD رباعي أوجه.
في المستوى (ADC) لدينا
F∈[AC] و E∈[AD] بحيث
(EF)//(DC) حيث AE=3
وAD=9 و EF=2 أحسب DC
لدينا حسب خاصية طاليس المباشرة:

$\frac{....}{....}=\frac{....}{....}=\frac{....}{....}$ ومنه $\frac{....}{....}=\frac{....}{....}$ و بالتالي DC=...........

III. التكبير و التصغير:

تعريف: انطلاقا من شكل، نستخرج شكلا آخر يشابهه و ذلك بضرب أبعاده في عدد حقيقي موجب قطعا k و يخالف 1.

ملاحظات:

نحصل على شكل مكبر إذاكان $k > 1$. نقول إننا قمنا بتكبير نسبته k

نحصل على شكل مصغر إذاكان $k < 1$. نقول إننا قمنا بتصغير نسبته k

- *أثر التكبير و التصغير على المساحات و الحجوم:*

قاعدة: عند تكبير أو تصغير مجسم في الفضاء:
إذا ضربنا الأبعاد في عدد k فإن :
★المساحات تضرب في k^2 .
★و الحجوم تضرب في k^3 .

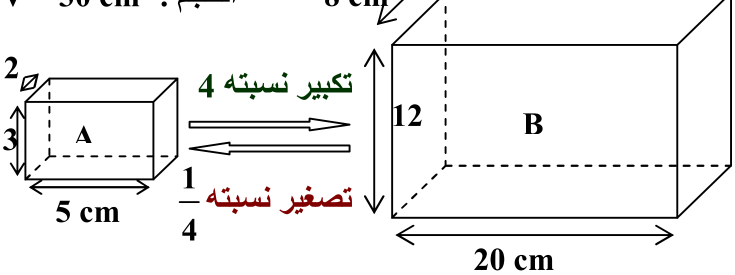
ليكن B هو المجسم الناتج عن تكبير أو تصغير نسبته k لمجسم A

- إذا كان a هو طول حرف في المجسم A ، و كان 'a هو طول الحرف الموافق له في المجسم B فإن : $a' = a \times k$ ومنه $k = \frac{a'}{a}$
- إذا كانت S هي مساحة المجسم A ، و كانت'S هي مساحة المجسم B فإن $S' = S \times k^2$ و منه $k^2 = \frac{S'}{S}$
- إذا كان V هو حجم المجسم A ، و كان 'V هو حجم المجسم B فإن $V' = V \times k^3$ و منه $k^3 = \frac{V'}{V}$

✪**مثال:** متوازي المستطيلات B هو تكبير لمتوازي المستطيلات A نسبة التكبير هي 4 :

الحجم: $V' = 1920\ cm^3$

الحجم : $V = 30\ cm^3$



المجسم B هو تكبير للمجسم A نسبة التكبير هي 4.

- حصلنا على أطوال المجسم B بضرب أطوال المجسم A في العدد .....
- نضرب S مساحة المجسم A في ..... فنحصل على 'S مساحة B
- نضرب V حجم المجسم A في ..... فنحصل على 'V حجم B:

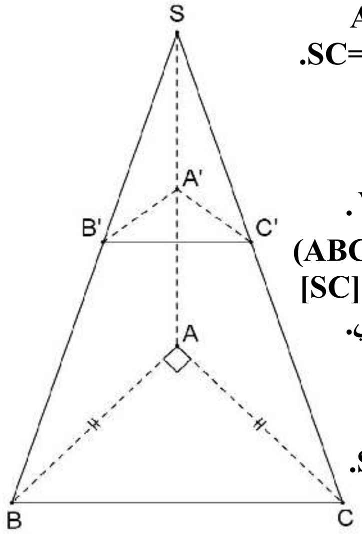
$V'=V\times.....=30\times....=1920\ cm^3$

تمارين في الهندسة الفضائية

التمرين1:

SABC رباعي أوجه ارتفاعه [SA] و قاعدته المثلث ABC القائم الزاوية و المتساوي الساقين في A

بحيث : AB=2cm و SC=7cm.



1) – بين أن : $SA = 3\sqrt{5}$ cm .

2) – ليكن V حجم الهرم SABC .

بين أن : $V = 2\sqrt{5}$ cm^3 .

3)– نعتبر مستوى موازٍ للمستوى (ABC) و يقطع الأضلاع [SA] و [SB] و [SC] في النقط A' و B' و C' على التوالي.

بحيث : $SA' = \frac{\sqrt{5}}{5} SA$.

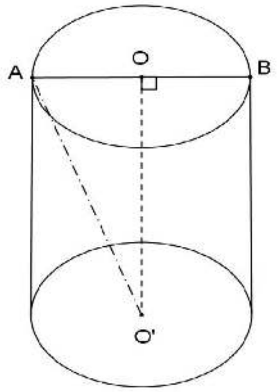
أحسب : V' حجم الهرم SA'B'C'.

التمرين2:

يمثل الشكـل جانبه أسطوانة قائمة بحيث

قطر قاعدتها AB = 2 cm

و ارتفاعها h = 10cm



أ) -- أحسب المسافة AO' .

ب) -- أحسب V حجم الأسطوانة .

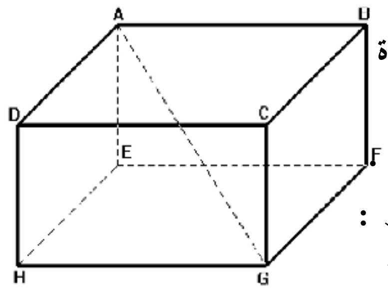
ت) -- أحسب S_L المساحة الجانبية للأسطوانة.

ج)-- أحسب V' و S'_L الحجم و المساحة الجانبية للاسطوانة المحصل عليها عند تكبير أبعاد هذه الاسطوانة بنسبة 2.

التمرين3:

حجرة دراسية على شكـل متوازي مستطيلات قائم ABCDEFGH أبعاده AB = 6m و AE = 3m و AD=2m

1) --- أ) -- بين أن المثلث AEG قائم الزاوية في E .



ب) -- بين أن: AG =7 m

2)- أ)- أحسب V حجم الحجرة

ب)-- تم إنجاز نموذج مصغر للحجرة نسبته $\frac{1}{10}$

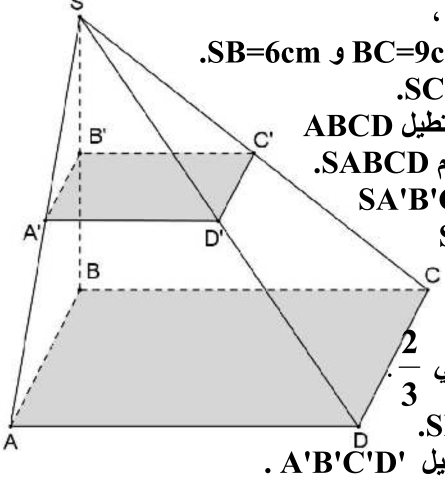
بين أن حجم هذا النموذج هو :

$v' = 3,6 \times 10^{-2}$ cm^3

التمرين4:

SABCD هرم قاعدته المستطيل ABCD، حيث أن (SB) عمودي على كل من (AB) و (BC) ،

و أن : AB=3cm و BC=9cm و SB=6cm.



1) --- أ) -- أحسب المسافة SC.

ب)-- أحسب مساحة المستطيل ABCD ثم أحسب V حجم الهرم SABCD.

2) – نعتبر أن الهرم SA'B'C'D' هو تصغير للهرم SABCD

و أن $V' = 16$ cm^3 .

أ) - بين أن نسبة التصغير هي $\frac{2}{3}$.

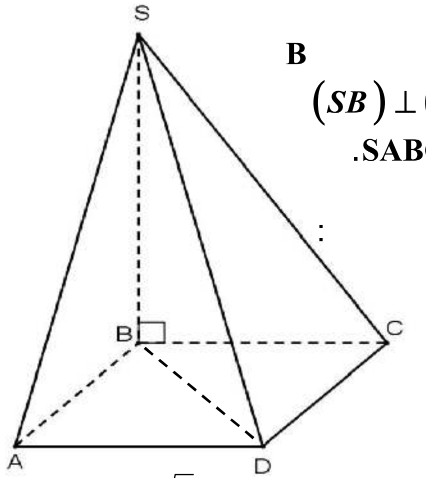
ب) -- أحسب المسافة : SB'.

ج) -- أحسب مساحة المستطيل A'B'C'D' .

التمرين5:

SABCD SBC B

بحيث: AB=4cm و AD=3cm و SB=12cm و SD=13cm



1)– DB=5cm :

2)– (- SBD B

($(SB) \perp (ABCD)$

3) - V .SABCD

– .V= 48cm^3

4) – 10 :

(- - h'

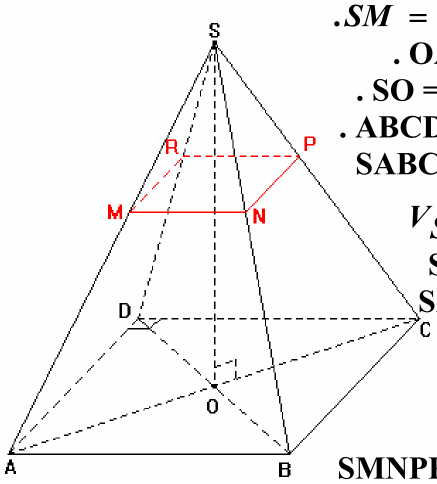
.

(- V'

.

التمرين6:

في الشكـل جانبه SABCD هرم منتظم بحيث $AB = 3\sqrt{2}$ cm و $SA = 5$ cm و $SM = 2$ cm.



1)- أ)- تحقق أن OA = 3 cm .

ب)- استنتج أن : SO = 4 cm .

ج)- أحسب مساحة المربع ABCD .

د)– بين ان حجم الهرم SABCD هو $V_{SABCD} = 24cm^3$

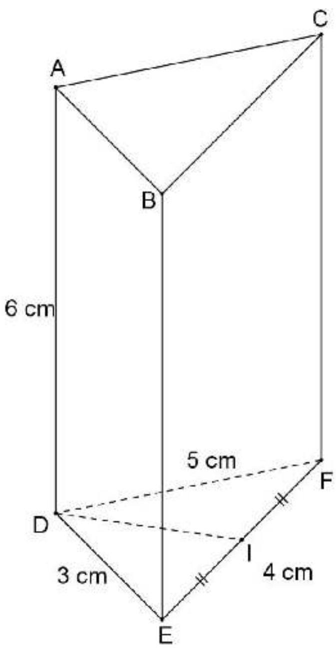
2)- نعتبر أن الهرم SMNPR يمثل تصغيرا للهرم SABCD

أ)- تحقق أن نسبةهي $\frac{2}{5}$

ب)- استنتج مساحة المربع MNPR و حجم الهرم SMNPR

التمرين7:

في الشكل جانبه ABCDEF موشور قائم



1)– أ) - بين أن DEF قائم الزاوية في E.

ب)- لتكن I منتصف القطعة [EF].

أحسب : DI.

2)– بن أن : $(AD) \perp (DI)$

3) بين أن حجم ABCDEF هو:

$V = 36\,cm^3$.

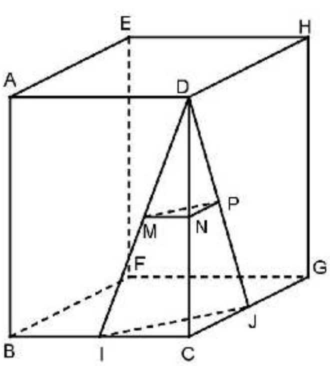
4)– قمنا بتكبير ABCDEF فحصلنا على موشور قائم مساحة قاعدته هي 24cm²

أ) -- حدد نسبة التكبير.

ب) -- أحسب حجم الموشور القائم المحصل عليه بعد التكبير.

التمرين8:

نعتبر في الفضاء مكعبا ABCDEFGH بحيث: AB = 4.



لتكن I و J و M و N و P منتصفات القطع [BC] و[CG] [DI] و[DC] و[DJ] على التوالي .

1) أحسب حجم ABCDEFGH ثم أحسب حجم رباعي الأوجه DCIJ

2) - بين أن: (MN) // (IC) واحسب MN

3) - أحسب DM .

4) - نقبل أن رباعي الأوجه DNMP تصغير لرباعي الأوجه DCIJ .

حدد نسبة التصغير و احسب حجم رباعي الأوجه DNMP.