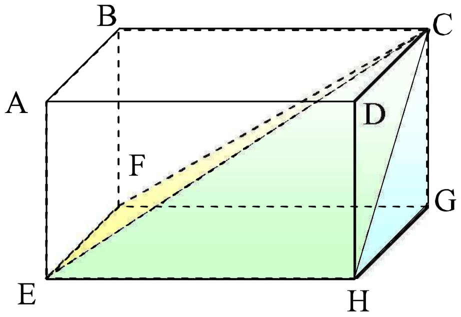
تمرين 1 ←انتبه ←تعليق

معطيات :

$AB = 3$ و $AD = 6$ و $AE = 4$



1- لنحسب BD و CH و BG

لدينا ABD مثلث قائم الزاوية في A ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$$BD^2 = AB^2 + AD^2$$
$$BD^2 = 3^2 + 6^2$$
$$BD^2 = 9 + 36$$
$$BD^2 = 45$$
$$BD = \sqrt{45}$$

لدينا DCH مثلث قائم الزاوية في D ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$$CH^2 = DC^2 + DH^2$$
$$CH^2 = 3^2 + 4^2$$
$$CH^2 = 9 + 16$$
$$CH^2 = 25$$
$$CH = 5$$

لدينا BGC مثلث قائم الزاوية في C ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$$BG^2 = BC^2 + CG^2$$
$$BG^2 = 6^2 + 4^2$$
$$BG^2 = 36 + 16$$
$$BG^2 = 52$$
$$BG = \sqrt{52}$$

2- أ- لنبين أن $(BF) \perp (BD)$

لدينا $ABFE$ مستطيل ، إذن : $(BF) \perp (AB)$

و لدينا $BCGF$ مستطيل ، إذن : $(BF) \perp (BC)$

و بما أن (AB) و (BC) متقاطعان و يحددان المستوى $(ABCD)$ ، فإن : $(BF) \perp (ABCD)$

و حيث أن (BD) ضمن المستوى $(ABCD)$

فإن : $(BF) \perp (BD)$

ب- لنحسب DF

لدينا حسب السؤال السابق BDF مثلث قائم الزاوية في B ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$$DF^2 = BF^2 + BD^2$$
$$DF^2 = 4^2 + \left(\sqrt{45}\right)^2$$
$$DF^2 = 16 + 45$$
$$DF^2 = 61$$
$$DF = \sqrt{61}$$

3- لنحسب حجم $ABCDEFGH$

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات قائم، حجمه :

$$V = AB \times AD \times AE$$
$$V = 3 \times 6 \times 4$$
$$V = 72$$

4- لنحسب حجم الهرم $CEFGH$

$CEFGH$ هرم قاعدته هي المستطيل $EFGH$ و ارتفاعه CG ، إذن حجمه :

$$V' = \frac{1}{3} \times CG \times S_{EFGH}$$
$$V' = \frac{1}{3} \times CG \times (EF \times EH)$$
$$V' = \frac{1}{3} \times 4 \times (3 \times 6)$$
$$V' = \frac{72}{3} = 24$$

←لاحظ أن الزوايا القائمة الحقيقية ليست ظاهرة في التمثيل ، هذا يعني أنه يتوجب استحضار الشكل الحقيقي لمتوازي المستطيلات القائم للعثور على هذه الزوايا.

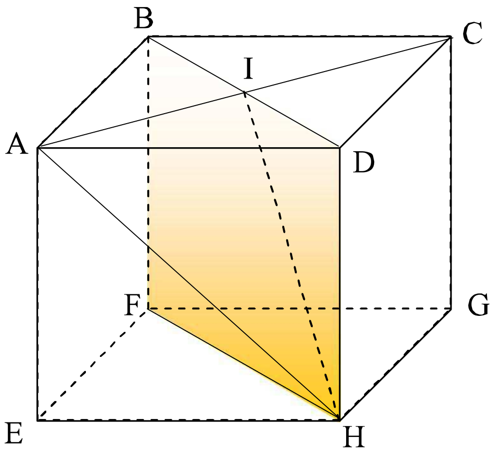
تمرين 2

انتبه ← تعليق ←

1- لنحسب AC و AI و AH

معطيات :

$AB = AD = AE = a = 4$



لدينا ADC مثلث قائم الزاوية في D ، إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة :

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$
$$AC^2 = 4^2 + 4^2$$
$$AC^2 = 16 + 16$$
$$AC^2 = 32$$
$$AC = \sqrt{32}$$

و بما أن I منتصف $[AC]$ فإن : $AI = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{\sqrt{32}}{2}$

لدينا ADH مثلث قائم الزاوية في D ، إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة :

$$AH^2 = AD^2 + DH^2$$
$$AH^2 = 4^2 + 4^2$$
$$AH^2 = 16 + 16$$
$$AH^2 = 32$$
$$AH = \sqrt{32}$$

← يستحسن تبسيط $AH = \sqrt{32} = \sqrt{16\times 2} = 4\sqrt{2}$ مما يسمح أيضا بتبسيط $AI = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ ، لكنه ليس إلزاميا.

2- أ- لنبين أن $(DH)\perp(ID)$

لدينا $ADHE$ مستطيل ، إذن : $(DH)\perp(AD)$

و لدينا $DCGH$ مستطيل ، إذن : $(DH)\perp(DC)$

و بما أن (AD) و (DC) متقاطعان و يحددان المستوى $(ABCD)$، فإن : $(DH)\perp(ABCD)$

و حيث أن (ID) ضمن المستوى $(ABCD)$

فإن : $(DH)\perp(ID)$

ب- احسب IH

لدينا حسب السؤال السابق IDH مثلث قائم الزاوية في D ، إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة :

$$IH^2 = ID^2 + DH^2$$
$$IH^2 = \left(\frac{\sqrt{32}}{2}\right)^2 + 4^2$$
$$IH^2 = \frac{32}{4} + 16$$
$$IH^2 = 8 + 16$$
$$IH^2 = 24$$
$$IH = \sqrt{24}$$

3- لنبين أن $(AI)\perp(IH)$

لدينا

$$AI^2 + IH^2 = \left(\frac{\sqrt{32}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{24}\right)^2$$
$$AI^2 + IH^2 = \frac{32}{4} + 24$$
$$AI^2 + IH^2 = 8 + 24$$
$$AI^2 + IH^2 = 32$$

و $AH^2 = \left(\sqrt{32}\right)^2$

$AH^2 = 32$

إذن : $AI^2 + IH^2 = AH^2$ ، بالتالي حسب مبرهنة فيثاغورس العكسية فإن المثلث AIH قائم الزاوية في النقطة I ، أي $(AI)\perp(IH)$

4- لنبين أن : $(AI)\perp(FBDH)$

لدينا $ABCD$ مربع ، إذن قطراه متعامدان ، منه $(AI)\perp(BD)$ ، و لدينا حسب السؤال السابق : $(AI)\perp(IH)$ ، و بما أن (BD) و (IH) متقاطعان و يحددان المستوى $(FBDH)$، فإن : $(AI)\perp(FBDH)$

5- لنحسب V_1 حجم المكعب $ABCDEFGH$

$$V_1 = a^2 = 4\times 4\times 4 = 64$$

تمرين 2

انتبه ← تعليق ←

6- لنحسب V_2 حجم رباعي الأوجه $AIDH$ بطريقتين

الطريقة الأولى

بما أن $(DH)\perp(ABCD)$ ، فإنه يمكن اعتبار $AIDH$ هرما قاعدته المثلث AID و ارتفاعه DH ، منه :

$$V_2=\frac{1}{3}\times DH\times S_{AID}$$

$$V_2=\frac{1}{3}\times DH\times\frac{AI\times ID}{2}$$

$$V_2=\frac{1}{3}\times 4\times\frac{\frac{\sqrt{32}}{2}\times\frac{\sqrt{32}}{2}}{2}$$

$$V_2=\frac{4}{3}\times\frac{\frac{32}{4}}{2}=\frac{4\times 8}{6}=\frac{32}{6}=\frac{16}{3}$$

الطريقة الثانية

بما أن $(AI)\perp(FBDH)$ ، فإنه يمكن اعتبار $AIDH$ هرما قاعدته المثلث IDH و ارتفاعه AI ، منه :

$$V_2=\frac{1}{3}\times AI\times S_{IDH}$$

$$V_2=\frac{1}{3}\times AI\times\frac{ID\times DH}{2}$$

$$V_2=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{32}}{2}\times\frac{\frac{\sqrt{32}}{2}\times 4}{2}$$

$$V_2=\frac{\sqrt{32}}{6}\times\frac{2\sqrt{32}}{2}=\frac{\sqrt{32}\times\sqrt{32}}{6}=\frac{32}{6}=\frac{16}{3}$$

← باستعمال التبسيط المشار إليه سابقا يمكن الحصول على النتيجة بسهولة

7- تحقق أن : $V_1=12V_2$

لدينا : $12V_2=12\times\frac{16}{3}=\frac{192}{3}=64$ ، إذن : $V_1=12V_2$

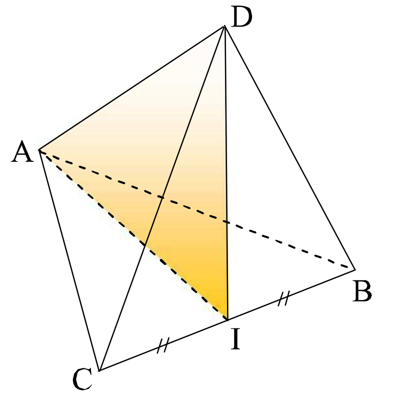
تمرين 3

انتبه ← تعليق ←

معطيات :

$AB=BC=AC=AD=DC=DB=4$

I منتصف $[BC]$



1- أ- بين أن $(DI)\perp(BC)$ ثم احسب DI

لدينا DBC مثلث متساوي الأضلاع و I منتصف $[BC]$ ، إذن (DI) يمثل ارتفاعا للمثلث DBC ، منه $(DI)\perp(BC)$

لدينا DIC مثلث قائم الزاوية في I ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$$DC^2=CI^2+DI^2$$

$$4^2=2^2+DI^2$$

$$16=4+DI^2$$

$$16-4=DI^2$$

$$12=DI^2$$

$$DI=\sqrt{12}$$

ب- احسب AI ثم حدد طبيعة المثلث AID

لدينا ABC مثلث متساوي الأضلاع و I منتصف $[BC]$ ، إذن (AI) يمثل ارتفاعا للمثلث ABC ، منه $(AI)\perp(BC)$

لدينا DIC مثلث قائم الزاوية في I ، إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

$$AC^2=CI^2+AI^2$$

$$4^2=2^2+AI^2$$

$$16=4+AI^2$$

$$16-4=AI^2$$

$$12=AI^2$$

$$AI=\sqrt{12}$$

إذن $AI=DI$ منه AID مثلث متساوي الساقين في النقطة I

تمرين 3

انتبه ← تعليق ←

2- بين أن $(BC)\perp(ADI)$

لدينا حسب ما سبق $(BC)\perp(ID)$ و $(BC)\perp(IA)$

و بما أن (ID) و (IA) متقاطعان و يحددان المستوى (ADI) ، فإن :

$(BC)\perp(ADI)$

3- ب- لنحسب مساحة المثلث AID

$$S_{AID}=\frac{AD\times IJ}{2}$$

$$S_{AID}=\frac{4\times\sqrt{8}}{2}$$

$$S_{AID}=2\sqrt{8}$$

3- أ- لنحسب IJ

لدينا حسب السؤال1-ب AID مثلث متساوي الساقين في النقطة I ، و J منتصف $[AD]$ ، إذن : (IJ) يمثل ارتفاعا للمثلث ADI ، منه $(IJ)\perp(AD)$

لدينا AIJ مثلث قائم الزاوية في J ، إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة

$$AI^2=AJ^2+IJ^2$$

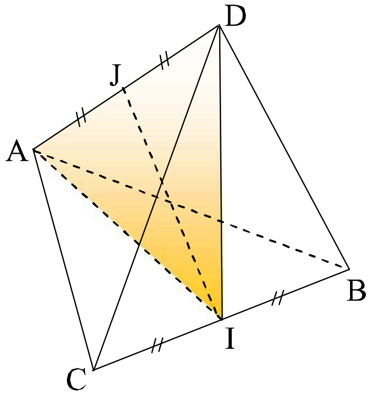
$$\left(\sqrt{12}\right)^2=2^2+IJ^2$$

$$12=4+IJ^2$$

$$12-4=IJ^2$$

$$8=IJ^2$$

$$IJ=\sqrt{8}$$



4-لنحسب حجم رباعي الأوجه $CAID$

لدينا حسب السؤال 2 :

$(BC)\perp(ADI)$ ، إذن : يمكن اعتبار $CAID$ هرما قاعدته المثلث AID و ارتفاعه CI ، منه :

$$V_1=\frac{1}{3}\times CI\times S_{AID}$$

$$V_1=\frac{1}{3}\times 2\times 2\sqrt{8}=\frac{4\sqrt{8}}{3}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

5-لنحسب حجم رباعي الأوجه $ABCD$

$$V=2V_1$$

$$V=\frac{16\sqrt{2}}{3}$$

← مستعينا بخطوات التمرين ،يمكنك أن تبرهن أنه إذا كان طول حرف رباعي أوجه منتظم $ABCD$ هو a ، فإن حجمه هو : $V=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

تمرين 4

انتبه ← تعليق ←

1- لنحسب حجم الموشور القائم $ABCEFG$

$$V_1=BF\times S_{EFG}$$

$$V_1=BF\times\frac{EF\times FG}{2}$$

$$V_1=4\times\frac{4\times 3}{2}=4\times 6=24$$

2-لنحسب حجم رباعي الأوجه $BEFG$

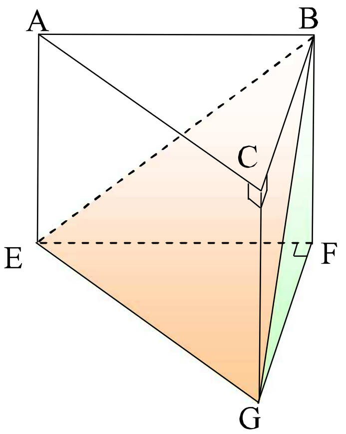
$$V_2=\frac{1}{3}\times BF\times S_{EFG}$$

$$V_2=\frac{1}{3}\times 24$$

$$V_2=8$$

معطيات :

$EF=4$ و $FG=3$ و $BF=4$



3- لنستنتج حجم الهرم $BAEGC$

$$V=V_1-V_2$$

$$V=24-8$$

$$V=16$$

4- أ- لنحسب مساحة المستطيل $ACGE$

لنحسب أولا AC ، لدينا ABC مثلث قائم الزاوية في B ، إذن حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة :

$$AC^2=AB^2+BC^2$$

$$AC^2=4^2+3^2$$ منه $AC=5$

$$AC^2=16+9=25$$

إذن $S_{ACGE}=AC\times CG=4\times 5=20$

4- ب- لنحسب h ارتفاع الهرم $BAEGC$

باعتبار أن $BAEGC$ هرم قاعدته $EACG$ و ارتفاعه h فإن :

$$V=\frac{1}{3}\times h\times S_{ACGE}$$

و لدينا حسب ماسبق $V=16$

إذن : $\frac{1}{3}\times h\times 20=16$

منه : $\frac{20h}{3}=16$

بالتالي : $h=\frac{16\times 3}{20}=\frac{48}{20}=\frac{12}{5}$

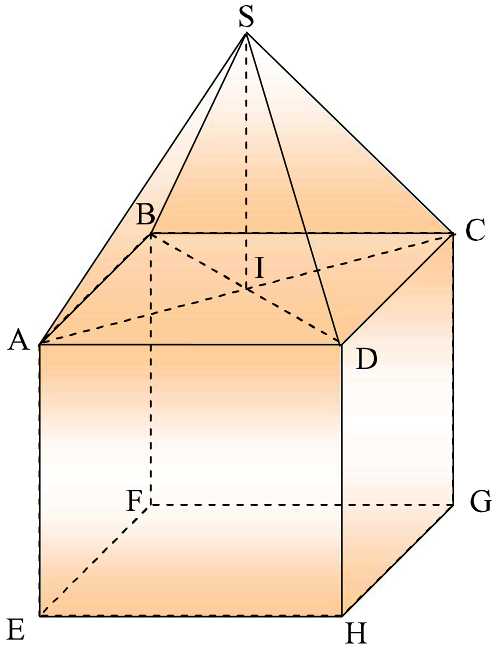
← لاحظ أن بعض المجسمات يمكن حساب حجمها بطرق مختلفة، لكونها إما جزءا من مجسمات أخرى أو لكونها تحتوي على أكثر من قاعدة و ارتفاع، و هذا يكون مفيدا في حساب بعض المسافات.

تمرين 5

انتبه ← تعليق ←

معطيات : $AB = 3cm$ و $SI = 4cm$

1- لنحسب حجم هذا المجسم



المجسم يتكون من مكعب و هرم مربع القاعدة.

حجم المكعب هو : $V_1 = AB^3 = 3\times3\times3 = 27\,cm^3$

و حجم الهرم $SABCD$ هو :

$$V_2 = \frac{1}{3}\times SI \times S_{ABCD}$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\times SI \times AB^2$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\times 4\times3\times3$$

$$V_2 = 12\,cm^3$$

بالتالي حجم هذا المجسم هو :

$$V = V_1 + V_2 = 27 + 12 = 39\,cm^3$$

2- لنحسب الحجم الحقيقي للمنزل بالمتر مكعب.

الحجم الحقيق هو :

$$V' = 200^3 \times V$$

$$V' = 200\times200\times200\times39\,cm^3$$

$$V' = 312\,000\,000\,cm^3$$

$$V' = 312\,m^2$$

لأن : $1\,000\,000\,cm^3 = 1m^3$