حلول تمارين من فروض الهندسة الفضائية

تمرين 1 :

1) أحسب المسافة AH

لدينا $(AE) \perp (AH)$

إذن المثلث AEH قائم الزاوية في E

إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فإن :

$$AH^2 = AE^2 + EH^2$$

$$AH^2 = 9^2 + 6^2$$

$$AH^2 = 81 + 36$$

$$AH^2 = 117$$

$$AH = \sqrt{117} = \sqrt{9 \times 13}$$

$$AH = 3\sqrt{13}$$

2) بين أن حجم الهرم $AEFH$ هو $V_1 = 54\ cm^3$

لدينا $V_1 = \frac{1}{3} \times B \times AE$

لنحسب B مساحة القاعدة التي عبارة عن مثلث EFH قائم الزاوية في E

إذن مساحته هي $B = \frac{EF \times EH}{2} = \frac{6 \times 6}{2} = 18$

ومنه $V_1 = \frac{1}{3} \times 18 \times 9$

$$V_1 = 54\ cm^3$$

3) أ - بين أن نسبة التصغير هي : $k = \frac{1}{2}$

لدينا $V_2 = k^3 \times V_1$

$$\frac{27}{4} = k^3 \times 54$$

$$k^3 = \frac{\frac{27}{4}}{54} = \frac{27}{4} \times \frac{1}{54} = \frac{27}{216}$$

$$k^3 = \left(\frac{3}{6}\right)^3$$

إذن $k = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ب - تحقق أن مساحة المثلث MPR هي: $S_2 = 4,5\ cm^2$

لدينا $S_2 = k^2 \times S_1$

$$S_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 18 = \frac{1}{4} \times 18$$

$$S_2 = 4,5\ cm^2$$

ج - بين أن M هي منتصف القطعة $[AE]$

لدينا $k = \frac{\text{ضلع من المجسم الصغير}}{\text{الضلع المناظر له في المجسم الكبير}}$

$$k = \frac{AM}{AE}$$ لدينا

$$\frac{1}{2} = \frac{AM}{AE}$$

$$AM = \frac{1}{2} AE$$

ومنه M هي منتصف القطعة $[AE]$

تمرين 2 :

1) أحسب حجم الهرم $SABCD$

لدينا $V = \frac{1}{3} \times S_{ABCD} \times SO$

ومنه $V = \frac{1}{3} \times 4^2 \times 6$

$$V = 32\ cm^3$$

2) بين أن : $AC = 4\sqrt{2}\ cm$

المثلث ABC قائم الزاوية في B

إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فإن :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = 4^2 + 4^2$$

$$AC^2 = 16 + 16$$

$$AC^2 = 32$$

$$AC = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2}$$

$$AC = 4\sqrt{2}\ cm$$

3) أ - بين أن : $MN = \frac{1}{3}AB$

في المثلث SAB لدينا :

$M \in [SA]$ و $N \in [SB]$ حيث $(MN)//(AB)$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة فإن :

$$\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{MN}{AB}$$

ولدينا $SM = \frac{1}{3}SA$ إذن $\frac{SM}{SA} = \frac{1}{3}$

إذن $\frac{MN}{AB} = \frac{1}{3}$

وبالتالي $MN = \frac{1}{3}AB$

ب -

➢ أحسب حجم الهرم $SMNPR$

لدينا $V' = k^3 \times V$

ولدينا $k = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{3}$

$$V' = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 32 = \frac{1}{27} \times 32 = \frac{32}{27}$$

$$V' = 1{,}18\ cm^3$$

إذن حجم الهرم $SMNPR$ هو : $V' = 1{,}18\ cm^3$

➢ استنتج حجم المجسم $ABCDMNPR$

لدينا $V'' = V - V' = 32 - 1{,}18$

إذن $V'' = 30{,}81\ cm^3$

تمرين 3 :

1) أ - بين أن : $DP = 6\sqrt{2}$

لدينا المثلث ADP قائم الزاوية في A

إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فإن :

$$DP^2 = AP^2 + AD^2$$

$$DP^2 = 6^2 + 6^2$$

$$DP^2 = 36 + 36$$

$$DP^2 = 72$$

$$DP = \sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2}$$

$$DP = 6\sqrt{2}$$

ب - أحسب المسافة PH

لدينا (DH) عمودي على المستوى $(ABCD)$

إذن (DH) عمودي على جميع المستقيمات التي ضمن المستوى $(ABCD)$ وبما أن (PD) توجد ضمنه

إذن $(DH) \perp (PD)$

إذن المثلث PDH قائم الزاوية في D

إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فإن :

$$PH^2 = DP^2 + DH^2$$

$$PH^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2 + 3^2$$

$$PH^2 = 72 + 9$$

$$PH^2 = 81$$

$$PH = \sqrt{81}$$

$$PH = 9$$

2) أحسب الحجم $ABCDEFGH$

نعلم أن حجم مكعب أو متوازي مستطيلات هو :

$V =$ الطول $\times$ العرض $\times$ الإرتفاع

إذن $V = EF \times EH \times AE$

$$V = 8 \times 6 \times 3$$

$$V = 144\ cm^3$$

تمرين 4 :

1) أ - بين أن المثلث BFH قائم الزاوية في F

لدينا $BFGC$ مربع إذن : $(BF) \perp (FG)$

لدينا $ABFE$ مربع إذن : $(BF) \perp (EF)$

ولدينا المستقيمين (EF) و (FG) متقاطعين في F ويوجدان ضمن المستوى $(EFGH)$

إذن $(BF) \perp (EFGH)$ ومنه المستقيم (BF) عمودي على جميع المستقيمات التي ضمن المستوى $(EFGH)$ وبما أن (FH) يوجد ضمن $(EFGH)$

إذن $(BF) \perp (FH)$

وبالتالي المثلث BFH قائم الزاوية في F

ب - أحسب المسافتين FH و BH

➢ نحسب المسافة FH :

لدينا المثلث EFH قائم الزاوية في E
إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فإن :

$$FH^2 = EH^2 + EF^2$$

$$FH^2 = 6^2 + 6^2$$

$$FH^2 = 36 + 36$$

$$FH^2 = 72$$

$$FH = \sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2}$$

$$FH = 6\sqrt{2}$$

➢ نحسب المسافة BH :

لدينا المثلث BFH قائم الزاوية في F
إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فإن :

$$BH^2 = BF^2 + FH^2$$

$$BH^2 = 6^2 + \left(6\sqrt{2}\right)^2$$

$$BH^2 = 36 + 72$$

$$BH^2 = 108$$

$$BH = \sqrt{108} = \sqrt{36 \times 3}$$

$$BH = 6\sqrt{3}$$

ج - بين أن حجم رباعي الأوجه $BIFJ$ هو: $V_1 = 9\ cm^3$

لدينا $BIFJ$ عبارة عن هرم ارتفاعه BF وقاعدته المثلث IFJ القائم الزاوية في F إذن :

لدينا $V_1 = \frac{1}{3} \times S_{IFJ} \times BF$

ومنه $V_1 = \frac{1}{3} \times \frac{3 \times 3}{2} \times 6$

$$V_1 = 9\ cm^3$$

3) أ - بين أن نسبة التصغير هي $\frac{1}{3}$

لدينا $k = \frac{BM}{BI}$

لنحسب BI :

لدينا المثلث BFI قائم الزاوية في F
إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فإن :

$$BI^2 = BF^2 + FI^2$$

$$BI^2 = 6^2 + 3^2$$

$$BI^2 = 36 + 9$$

$$BI^2 = 45$$

$$BI = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5}$$

$$BI = 3\sqrt{5}$$

إذن $k = \frac{BM}{BI} = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{3}$

ب - استنتج حجم المجسم $BMNP$

لدينا $V_2 = k^3 \times V_1$

$$V_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 9 = \frac{9}{27} = \frac{9 \times 1}{9 \times 3}$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\ cm^3$$

تمرين 5 :

1) بين أن حجم الهرم $SABC$ هو $V_1 = 4\sqrt{3}\ cm^3$

لدينا $V_1 = \frac{1}{3} \times S_{ABC} \times SA$

ومنه $V_1 = \frac{1}{3} \times \frac{2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3}$

$$V_1 = \frac{1}{3} \times 6 \times 2\sqrt{3}$$

$$V_1 = 4\sqrt{3}\ cm^3$$

2) أ - أحسب V_2 حجم الهرم $S'AB'C'$

لدينا $V_2 = k^3 \times V_1$

$$V_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 4\sqrt{3} = \frac{1}{27} \times 4\sqrt{3}$$

$$V_2 = \frac{4\sqrt{3}}{27}\ cm^3$$

ب - أحسب مساحة المثلث $AB'C'$

لدينا $S' = k^2 \times S_{ABC}$

$$S_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 6 = \frac{1}{9} \times 6 = \frac{6}{9}$$

$$S_2 = \frac{2}{3}\ cm^2$$

تمرين 6 :

1) أ - أحسب V حجم المكعب $ABCDA'B'C'D'$

إذن $V = AB \times AD \times AA'$

$$V = AB^3$$

$$V = 6^3$$

$$V = 216\ cm^3$$

ب - أحسب المسافة BD

لدينا المثلث ABD قائم الزاوية في A

إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فإن :

$$BD^2 = AB^2 + AD^2$$

$$BD^2 = 6^2 + 6^2$$

$$BD^2 = 36 + 36$$

$$BD^2 = 72$$

$$BD = \sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2}$$

$$BD = 6\sqrt{2}\ cm$$

ج - بين أن المستقيمين (PQ) و (BD) متوازيان

لدينا في المثلث ABD :

$$\frac{AP}{AB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{AQ}{AD} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

إذن $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AD}$

وبما أن النقط A و P و B في نفس ترتيب النقط A و Q و D إذن حسب مبرهنة طاليس العكسية فإن :

$$(BD)//(PQ)$$

أحسب النسبة $\frac{PQ}{BD}$

في المثلث ABD لدينا :

$P \in [AB]$ و $Q \in [AD]$ حيث $(BD)//(PQ)$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة فإن :

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AD} = \frac{PQ}{BD}$$

لدينا $\frac{AP}{AB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

إذن $\frac{PQ}{BD} = \frac{1}{3}$

2) تأكد أن حجم الهرم $ABDA'$ هو $V_1 = 36\ cm^3$

لدينا $ABDA'$ عبارة عن هرم ارتفاعه AA' وقاعدته المثلث ABD القائم الزاوية في A إذن :

لدينا $V_1 = \frac{1}{3} \times S_{ABD} \times AA'$

ومنه $V_1 = \frac{1}{3} \times \frac{AB \times AD}{2} \times AA'$

$$V_1 = \frac{1}{3} \times \frac{6 \times 6}{2} \times 6$$

$$V_1 = 36\ cm^3$$

3) أ - تحقق أن نسبة التصغير هي $\frac{1}{3}$

لدينا $k = \frac{AP}{AA'} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

ب - استنتج V_2 حجم الهرم $APQR$

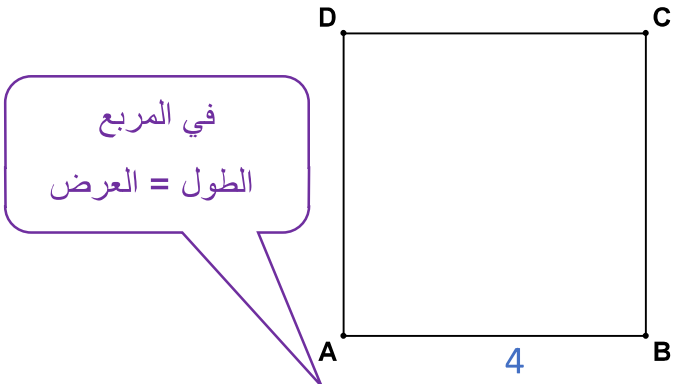
لدينا $V_2 = k^3 \times V_1$

$$V_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 36 = \frac{1}{27} \times 36 = \frac{36}{27} = \frac{9 \times 4}{9 \times 3}$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\ cm^3$$

قواعد هامة :

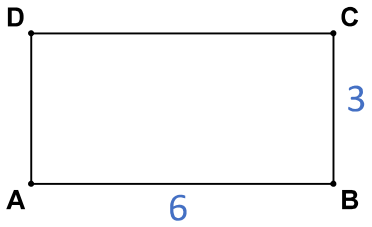
مساحة المربع $ABCD$ هي :



$$S_{ABCD} = \text{الطول} \times \text{العرض} = AB \times BC$$

$$S_{ABCD} = 4 \times 4 = 16\ cm^2$$

مساحة المستطيل $ABCD$ هي :

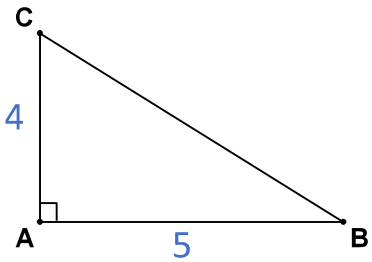


$$S_{ABCD} = \text{الطول} \times \text{العرض} = AB \times BC$$

$$S_{ABCD} = 6 \times 3 = 18\ cm^2$$

وحدة المساحة هي : cm^2

مساحة المثلث ABC القائم الزاوية في A هي :



$$S_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10\ cm^2$$