

الجذور المربعة

مربعات كاملة

a	a ²
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100
11	121
12	144

$$\sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{14} < \sqrt{16}$$

$$3 < 3,31 < 3,74 < 4$$

I. جذر مربع عدد موجب :

تعريف

ليكن a عدداً حقيقياً موجِباً، العدد الحقيقي الموجب الذي مربعه a يسمى الجذر المربع للعدد a ويرمز له بـ \sqrt{a} ويقرأ جذر مربع a بحيث :

$$\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a$$

ملاحظات :

- ❖ \sqrt{a} تكون لها معنى إذا كان a عدد حقيقي¹ موجب.
- ❖ نقول أن b بحيث $b \geq 0$ هو جذر مربع للعدد a إذا كان $b^2 = a$ مثال :
6 هو جذر مربع للعدد 36 لأن $6^2 = 36$ و لدينا $(-6)^2 = 36$ إلا أن -6 ليست جذر مربع لـ 36 لأنها سالبة.

❖ إذا كان $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ فإن $(\sqrt{a})^2 = (\sqrt{b})^2$ وبالتالي $a = b$

❖ مثال $\sqrt{x} = (x)^{\frac{1}{2}}$ مثل $\sqrt{81} = (81)^{\frac{1}{2}} = (81)^{0,5} = 9$

أمثلة :

$$\sqrt{0} = 0 ; \sqrt{1} = 1 ; \sqrt{2} = 1,41 ; \sqrt{3} = 1,73 ; \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$$

$$-\sqrt{0,49} = -\sqrt{0,7^2} = -0,7$$

$$\sqrt{1,44} = \sqrt{1,2^2} = 1,2$$

$$\frac{1}{\sqrt{81}} = \frac{1}{\sqrt{9^2}} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{\sqrt{25}}{3} = \frac{\sqrt{5^2}}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = (\sqrt{5})^2 = 5$$

$$\sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$$

$$\sqrt{\frac{25}{100}} = \sqrt{\left(\frac{5}{10}\right)^2} = \frac{5}{10}$$

$$\sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{\sqrt{9^2}} = \sqrt{9} = 3$$

انتبه :

✓ $\sqrt{-5}$ لا معنى لها لأن مابداخل الجذر يجب أن يكون موجِباً.

✓ $(-7)^2 = -7 \times -7 = 49 = 7^2$ وبالتالي $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{7^2} = 7$

✓ $-\sqrt{7^2} = -7$ و $(-\sqrt{7})^2 = -\sqrt{7} \times -\sqrt{7} = \sqrt{7^2} = 7$

✓ $\sqrt{3^8} = \sqrt{3^{2 \times 4}} = (\sqrt{3^2})^4 = 3^4 = 81$

✓ $\sqrt{4 + \sqrt{5^2}} = \sqrt{4 + 5} = \sqrt{9} = 3$ و $(2\sqrt{5})^2 = 2^2 \times \sqrt{5^2} = 4 \times 5 = 20$

¹ مجموعة الأعداد الحقيقية هي IR وتضم جميع أعداد القياسات سواء كانت موجبة أو سالبة .

II. العمليات على الجذور المربعة :

خاصية 1

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad : \text{ و } a \text{ و } b \text{ و } c \text{ أعداد حقيقية موجبة}$$
$$\sqrt{a \times b \times c \times d} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c} \times \sqrt{d}$$

أمثلة :

$$\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{3 \times 5} = \sqrt{15}$$

$$\sqrt{9 \times 4} = \sqrt{9} \times \sqrt{4} = 3 \times 2 = 6$$

$$\sqrt{12} \times \sqrt{3} = \sqrt{12 \times 3} = \sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{6} = \sqrt{2 \times 3 \times 6} = \sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{900} = \sqrt{9 \times 100} = \sqrt{9} \times \sqrt{100} = 3 \times 10 = 30$$

$$\sqrt{4900} = \sqrt{49 \times 100} = \sqrt{49} \times \sqrt{100} = 7 \times 10 = 70$$

خاصية 2

$$\sqrt{a^2 \times b} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} = a\sqrt{b} \quad : \text{ و } a \text{ و } b \text{ عدداً حقيقيين موجبان}$$

أمثلة :

$$-\sqrt{45} = -\sqrt{9 \times 5} = -\sqrt{9} \times \sqrt{5} = -3\sqrt{5}$$

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{5^2 \times 2} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$3\sqrt{20} = 3\sqrt{4 \times 5} = 3\sqrt{4} \times \sqrt{5} = 3 \times 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

$$\sqrt{5^2 \times 2^2 \times 3} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{3} = 5 \times 2\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

$$\sqrt{180} = \sqrt{9 \times 2 \times 2 \times 5} = \sqrt{9 \times 4 \times 5}$$

$$= \sqrt{9} \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$
$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$
$$\sqrt{a \times b} \neq \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

انتبه :

$$\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} - \sqrt{7} = \sqrt{3^4} - \sqrt{7} = (\sqrt{3^2})^2 - \sqrt{7} = 3^2 - \sqrt{7} = 9 - \sqrt{7}$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{7} = 4\sqrt{3} - \sqrt{7} \quad ; \quad \sqrt{5} \times 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{5 \times 3} = 2\sqrt{15}$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{5} = 2\sqrt{3} + \sqrt{5} \quad ; \quad \sqrt{25} + \sqrt{9} = \sqrt{25+9} = 5 + 3 = 8$$

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{7} \times \sqrt{2} - \sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{14} - \sqrt{36} = \sqrt{14} - 6$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad : b \neq 0 \text{ و } a \text{ عدادان حقيقيان موجبان و } b \neq 0$$

أمثلة :

$$\frac{-\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = -\sqrt{\frac{12}{3}} = -\sqrt{\frac{4 \times 3}{3}} = -\sqrt{4} = -2$$

$$2\sqrt{\frac{5}{4}} = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

$$\frac{\sqrt{55}}{\sqrt{45}} = \sqrt{\frac{5 \times 11}{5 \times 9}} = \sqrt{\frac{11}{9}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{11}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{500}}{\sqrt{35}} = \sqrt{\frac{500}{35}} = \sqrt{\frac{5 \times 100}{5 \times 7}} = \sqrt{\frac{100}{7}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{7}} = \frac{10}{\sqrt{7}}$$

III. حذف الجذر من المقام :

1. المقام لا يحتوي على مجموع أو فرق :

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b} \quad : b \neq 0 \text{ و } a \text{ عدادان حقيقيان موجبان و } b \neq 0$$

أمثلة :

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{-5}{\sqrt{5}} = \frac{-5}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{-5\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2} = \frac{-5\sqrt{5}}{5} = -\sqrt{5}$$

$$\frac{-2}{5\sqrt{3}} = \frac{-2}{5\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{5\sqrt{3}^2} = \frac{-2\sqrt{3}}{15}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{3 \times 5}}{\sqrt{5}^2} = \frac{2\sqrt{15}}{5}$$

$$\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}-2)}{\sqrt{5}^2} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}-2)}{5}$$

$$\frac{3+\sqrt{2}}{4\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{2}}{4\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(3+\sqrt{2})}{4\sqrt{5}^2} = \frac{\sqrt{5}(3+\sqrt{2})}{4 \times 5} = \frac{\sqrt{5}(3+\sqrt{2})}{20}$$



2. المقام يحتوي على مجموع أو فرق :

مفهوم المرافق :

مرافق $a + b$ هو $-a - b$
مرافق $-a - b$ هو $-a + b$

مرافق $a + b$ هو $a - b$
مرافق $a - b$ هو $a + b$

أمثلة :

الجداء $a \times b$	مرافقه b	العدد a
$(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 2^2 - \sqrt{3}^2 = 4 - 3 = 1$	$2 - \sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$
$(5 - \sqrt{5})(5 + \sqrt{5}) = 5^2 - \sqrt{5}^2 = 25 - 5 = 20$	$5 + \sqrt{5}$	$5 - \sqrt{5}$
$(-3 + \sqrt{2})(-3 - \sqrt{2}) = (-3)^2 - \sqrt{2}^2 = 9 - 2 = 7$	$-3 - \sqrt{2}$	$-3 + \sqrt{2}$
$(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) = \sqrt{5}^2 - \sqrt{2}^2 = 5 - 2 = 3$	$\sqrt{5} - \sqrt{2}$	$\sqrt{5} + \sqrt{2}$
$(-2\sqrt{3} + 4)(-2\sqrt{3} - 4) = (-2\sqrt{3})^2 - 4^2 = 12 - 16 = -4$	$-2\sqrt{3} - 4$	$-2\sqrt{3} + 4$

a و b عدادان حقيقيان موجبان قطعاً و c عدد حقيقي :

$$\frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{c\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

أمثلة :

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{1 \times (\sqrt{2} - \sqrt{3})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}^2 - \sqrt{3}^2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{-1} = -(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = -\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

المنطابقة رقم 3

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{7} + \sqrt{6}}{\sqrt{7} + \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3} \times (\sqrt{7} + \sqrt{6})}{\sqrt{7}^2 - \sqrt{6}^2} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{7} + \sqrt{6})}{7 - 6}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{7} + \sqrt{6})}{1} = 2\sqrt{3}(\sqrt{7} + \sqrt{6})$$

$$\frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{\sqrt{7}^2 - \sqrt{5}^2} = \frac{2(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{2} = \sqrt{7} + \sqrt{5}$$

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{5})^2}{2^2 - 5^2} = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{5})^2}{4 - 25} = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{5})^2}{-21}$$

IV. حل المعادلة $x^2 = a$ في \mathbb{R} :

الحالة 1 : $x^2 = a$ بحيث $a = 0$ المعادلة تقبل حلاً وحيداً هو $x = 0$

• حل في \mathbb{R} المعادلة : $2(x^2 + 3) = 6$

$$2(x^2 + 3) = 6 \Leftrightarrow x^2 + 3 = \frac{6}{2} \Leftrightarrow x^2 + 3 = 3$$

إذن المعادلة تقبل حلاً وحيداً هو $x = 0$ $x^2 = 3 - 3 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

الحالة 2 : $x^2 = a$ بحيث $a > 0$ المعادلة تقبل حلين هما \sqrt{a} و $-\sqrt{a}$

• حل في \mathbb{R} المعادلة : $x^2 = 9$

$$x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3^2 = 0$$

$$(x - 3)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \text{ أو } x + 3 = 0$$

إذن المعادلة تقبل حلين هما 3 و -3 $x = 3$ أو $x = -3$

• حل في \mathbb{R} المعادلة : $2x^2 = 10$

$$2x^2 = 10 \Leftrightarrow x^2 = \frac{10}{2} \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 5 = 0$$

$$x^2 - \sqrt{5}^2 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$$

$$x - \sqrt{5} = 0 \text{ أو } x + \sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{5} \text{ أو } x = -\sqrt{5}$$

إذن المعادلة تقبل حلين هما $\sqrt{5}$ و $-\sqrt{5}$

الحالة 3 : $x^2 = a$ بحيث $a < 0$ المعادلة لا تقبل حل .

• حل في \mathbb{R} المعادلة : $x^2 + 12 = 2$

$$x^2 + 12 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2 - 12 \Leftrightarrow x^2 = -10$$

إذن المعادلة لا تقبل حل لأن x^2 يكون دائماً موجباً أو منعدماً $x^2 \geq 0$