الدرس ①: الجذور المربعة

I - الجذر المربع لعدد حقيقي موجب:

1) نشاط ①:

① باستعمال الآلة الحاسبة، أتمم ملأ الجدول أسفله

x	0	1	1.44	$0,64$	$\frac{81}{49}$
$\sqrt{x}$	0	1	12	$\frac{4}{5}=0,8$	$\frac{9}{7}$

② أتمم الفراغ بالعدد المناسب.

* $\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{36}$ * $(\sqrt{7})^2=7$ * $(3)^2=9$

* $\left(\frac{-1}{8}\right)^2=\frac{1}{64}$ * $\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$ * $(\sqrt{5})^2=5$

2) تعريف:

a عدد حقيقي موجب

الجذر المربع للعدد a هو العدد الحقيقي الموجب الذي مربعه a ويكتب $\sqrt{a}$

نتيجة: لكل عدد حقيقي موجب.

$$\boxed{\sqrt{a^2}=a} \quad , \quad \boxed{(\sqrt{a})^2=a}$$

3) أمثلة:

* $\sqrt{0}=0$ لأن $0^2=0$.
* $\sqrt{1}=1$ لأن $1^2=1$
* $\sqrt{9}=3$ لأن: $3^2=9$
* $\sqrt{49}=7$ لأن $7^2=49$
* $\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$ لأن: $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

* **ملاحظة هامة:** $\sqrt{a}$ لها معنى فقط إذا كان $a\geq 0$

* **أمثلة للحفظ:**

* $\sqrt{0}=0$ * $\sqrt{1}=1$ * $\sqrt{4}=2$
* $\sqrt{9}=3$ * $\sqrt{16}=4$ * $\sqrt{25}=5$
* $\sqrt{49}=7$ * $\sqrt{64}=8$ * $\sqrt{81}=9$
* $\sqrt{100}=10$ * $\sqrt{121}=11$ * $\sqrt{144}=12$
* $\sqrt{169}=13$ * $\sqrt{196}=14$ * $\sqrt{225}=15$
* $\sqrt{256}=16$ * $\sqrt{289}=17$ * $\sqrt{324}=18$
* $\sqrt{361}=19$ * $\sqrt{400}=20$

* **تمرين تطبيقي:** تمرين 5 ص 38

* $\sqrt{121}=\sqrt{11^2}=11$
* $\sqrt{10000}=\sqrt{100^2}=100$
* $\sqrt{6400}=\sqrt{64\times100}=\sqrt{8^2\times10^2}=\sqrt{(8\times10)^2}=80$
* $\sqrt{0,36}=\sqrt{\frac{36}{100}}=\sqrt{\left(\frac{6}{10}\right)^2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$
* $\sqrt{\frac{49}{25}}=\sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2}=\frac{7}{5}$
* $\sqrt{\frac{9}{100}}=\sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^2}=\frac{3}{10}$

3) مربع جذر مربع عدد حقيقي:

أ- قاعدة:

a عدد حقيقي:

1/ إذا كان a موجب فإن: $\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2=a$

2/ إذا كان a سالب فإن: $\sqrt{a^2}=(\sqrt{-a})^2=-a$

ب- أمثلة:

* $\sqrt{(-3)^2}=3$ * $\sqrt{\frac{11}{5}}^2=\frac{11}{5}$ * $\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}$
* $\sqrt{(-7)^2}=7$ * $\sqrt{\sqrt{9}}^2=\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=3$

ج- تمرين تطبيقي:

بسط ما يلي:

* $\sqrt{\sqrt{16}}$ * $\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}$
* $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{7}}^2$ * $\sqrt{\sqrt{5}^2}^2$
* $\sqrt{7+\sqrt{2}^2}$ * $\sqrt{(-7-\sqrt{5})^2}$

الحل:

* $\sqrt{\sqrt{16}}=\sqrt{\sqrt{4^2}}=\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$
* $\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}=3+\sqrt{2}$
* $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{7}}^2=\frac{\sqrt{2}}{7}$
* $\sqrt{\sqrt{5}^2}^2=\sqrt{5}^2=5$
* $\sqrt{7+\sqrt{2}^2}=\sqrt{7+2}=\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=3$
* $\sqrt{(-7-\sqrt{5})^2}=-(-7-\sqrt{5})=7+\sqrt{5}$

IV - حل المعادلة $x^2 = a$

1) إذا كان $a>0$

المعادلة $x^2=a$ تكافئ على التوالي

$x^2-a=0$

$x^2-\sqrt{a}^2=0$

$(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})=0$

$x-\sqrt{a}=0$ أو $x+\sqrt{a}=0$

$x=\sqrt{a}$ أو $x=-\sqrt{a}$

2) إذا كان $a=0$

المعادلة $x^2=a$ تكافئ على التوالي

$x^2=0$

$x=0$

المعادلة تقبل حلا وحيدا هو 0

3) إذا كان $a<0$

المعادلة $x^2=a$ ليس لها حل

قاعدة:

حلول المعادلة $x^2=a$	* إذا كان $a=0$	فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا هو $x=0$
	* إذا كان $a>0$	فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين هما $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$
	* إذا كان $a<0$	فإن المعادلة ليس لها حل.

* تمرين تطبيقي:

حل المعادلات الآتية:

* $-13+x^2=-4$ * $2x^2=6$
* $2(x^2-1)=-2$ * $3x^2+15=3$

الحل:

* المعادلة $2x^2=6$ تكافئ على التوالي

$x^2=\frac{6}{2}$

$x^2=3$

$x=\sqrt{3}$ أو $x=-\sqrt{3}$

إذن حلا هذه المعادلة هما $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$

* المعادلة $-13+x^2=-4$ تكافئ على التوالي

$x^2=-4+13$

$x^2=9$

$x=\sqrt{9}=3$ أو $x=-\sqrt{9}=-3$

إذن حلا هذه المعادلة هما العددان 3 و -3

* المعادلة $2(x^2-1)=-2$ تكافئ على التوالي

$2x^2-2=-2$

$2x^2=-2+2$

$2x^2=0$

$x^2=0$

$x=0$

إذن هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا هو العدد 0

* المعادلة $3x^2+15=3$ تكافئ على التوالي

$3x^2=3-15$

$3x^2=-12$

$x^2=-\frac{12}{3}$

$x^2=-4$

إذن هذه المعادلة ليس لها حل.

III - العمليات على الجذور المربعة:

1) الجذر المربع والضرب:

أ - خاصية ①:

a و b عددان حقيقيان موجبان لدينا: $\boxed{\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}}$

* أمثلة:

* $\sqrt{2}\times\sqrt{6}=\sqrt{2\times6}=\sqrt{12}$
* $\sqrt{3}\times\sqrt{12}=\sqrt{3\times12}=\sqrt{36}=6$
* $\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{2\times3\times5}=\sqrt{30}$
* $\sqrt{125}=\sqrt{25\times5}=\sqrt{25}\times\sqrt{5}=5\sqrt{5}$

ب - خاصية ②:

a و b عددان حقيقيان موجبان لدينا:

$\boxed{\sqrt{a^2\times b}=a\sqrt{b}}$

* أمثلة:

* $\sqrt{3^2\times11}=3\sqrt{11}$
* $\sqrt{25\times7}=\sqrt{5^2\times7}=5\sqrt{7}$
* $\sqrt{8}=\sqrt{2^2\times2}=2\sqrt{2}$
* $\sqrt{3^2\times7}\times\sqrt{2^2\times3}=3\sqrt{7}\times2\sqrt{3}=3\times2\sqrt{7\times3}=6\sqrt{21}$

* تقنيات ومهارات:

1) التفكيك:

لنبسط $\sqrt{180}$، من أجل ذلك نفكك 180 لتفكيك

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

إذن: $180=2^2\times3^2\times5$

ومنه فإن: $\sqrt{180}=\sqrt{2^2\times3^2\times5}$

$=2\times3\times\sqrt{5}$

وبالتالي فإن: $\boxed{\sqrt{180}=6\sqrt{5}}$

2) الجذور المربعة والقوى:

لنبسط ما يلي: $A=\sqrt{5^6}$ ، $B=\sqrt{7^5}$

$A=\sqrt{5^6}=\sqrt{(5^3)^2}=5^3=125$

$B=\sqrt{7^5}=\sqrt{7^4\times7}=\sqrt{(7^2)^2\times7}=7^2\times\sqrt{7}=49\sqrt{7}$

* **تمرين تطبيقي:**

بسط واحسب ما يلي:

$a = \sqrt{\sqrt{3^4} \times 5^2 \times 2^7}$

$b = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}$

$c = (3\sqrt{2} + \sqrt{5})(3\sqrt{2} - \sqrt{5})$

$d = \sqrt{25} + \sqrt{81} - 2\sqrt{9}$

$e = \sqrt{96} + 2\sqrt{24} - 3\sqrt{54}$

* **الحل:**

$a = \sqrt{\sqrt{3^4} \times 5^2 \times 2^7}$

$= \sqrt{\sqrt{{3^2}^2} \times 5^2 \times 2^6 \times 2}$

$= \sqrt{3^2 \times 5^2 \times (2^3)^2 \times 2}$

$= 3 \times 5 \times 2^3 \times \sqrt{2}$

$\boxed{a = 120\sqrt{2}}$

$b = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}$

$= \sqrt{4 + 9 + 36}$

$= \sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7$

$c = (3\sqrt{2} + \sqrt{5})(3\sqrt{2} - \sqrt{5})$

$= (3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2$

$= 9 \times 2 - 5 \quad = 18 - 5$

$\boxed{c = 13}$

$d = \sqrt{25} + \sqrt{81} - 2\sqrt{9}$

$= \sqrt{5^2} + \sqrt{9^2} - 2\sqrt{3^2}$

$= 5 + 9 - 2 \times 3$

$= 14 - 6 \quad \boxed{d = 8}$

$e = \sqrt{96} + 2\sqrt{24} - 3\sqrt{54}$

$= \sqrt{16 \times 6} + 2\sqrt{4 \times 6} - 3\sqrt{9 \times 6}$

$= \sqrt{4^2 \times 6} + 2\sqrt{2^2 \times 6} - 3\sqrt{3^2 \times 6}$

$= 4\sqrt{6} + 2 \times 2\sqrt{6} - 3 \times 3\sqrt{6}$

$= 4\sqrt{6} + 4\sqrt{6} - 9\sqrt{6}$

$= (4 + 4 - 9)\sqrt{6} \quad \boxed{e = -\sqrt{6}}$

2) الجذر المربع والقسمة:

أ- خاصية ①:

a و b عددان حقيقيان موجبان و $b \neq 0$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

* **أمثلة:**

* $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$
* $\sqrt{\frac{3}{25}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$
* $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{15}{5}} = \sqrt{3}$

ب- خاصية ②:

a و b عددان حقيقيان بحيث $b \neq 0$ و b موجب

$$\sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{b} \quad , \quad \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

* **أمثلة:**

* $\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$
* $\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
* $\sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
* $\sqrt{\frac{7}{5}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7} \times \sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{35}}{5}$

3) إزالة الجذر المربع من المقام:

أ- حالة ①: مقام لا يحتوي على + أو -

* $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
* $\frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{5 \times 2} = \frac{\sqrt{6}}{10}$
* $\frac{2 + \sqrt{7}}{3\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}(2 + \sqrt{7})}{3 \times 11} = \frac{2\sqrt{11} + \sqrt{77}}{33}$

ب- حالة ②: مقام يحتوي على + أو -

* **تعريف:** المرافق

ليكن a و b عددين حقيقيين موجبين قطعا.
مرافق $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ هو $\sqrt{a} - \sqrt{b}$
ومرافق $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ هو $\sqrt{a} + \sqrt{b}$
أو نقول أن العددين $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ و $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ مترافقان
ولدينا: $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2 = a - b$

* **أمثلة:**

* $\frac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} = \frac{3(\sqrt{2} - \sqrt{5})}{(\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{5})}$

$= \frac{3(\sqrt{2} - \sqrt{5})}{\sqrt{2}^2 - \sqrt{5}^2} = \frac{3(\sqrt{2} - \sqrt{5})}{2 - 5}$

$= \frac{3(\sqrt{2} - \sqrt{5})}{-3}$

$= -(\sqrt{2} - \sqrt{5})$

$= \sqrt{5} - \sqrt{2}$