3 coll

المعادلات والمتراجحات

I. المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد :

تعريف

✓ كل عبارة رياضية تحتوي على رمز = تسمى متساوية .

✓ كل متساوية على شكل $ax + b = 0$ تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد هو x .

ملاحظة :

❖ حل المعادلة هو البحث عن جميع قيم x إن وجدت .

الحالة 1 : معادلات من نوع $ax + b = c$

حــل المعــــــــــــــادلات التالية :

لدينا $-3x + 4 = 0$

يعني أن $-3x = -4$

إذن $x = \frac{-4}{-3}$

ومنه $x = \frac{4}{3}$

وبالتالي المعادلة تقبل حل وحيد هو $\frac{4}{3}$

لدينا $5(x + 1) = 2x - 1$

$5x + 5 = 2x - 1$

$5x - 2x = -1 - 5$

$3x = -6$

$x = \frac{-6}{3}$

وبالتالي المعادلة تقبل حل وحيد هو $x = -2$

لدينا $3(2x - 1) = 6x + 7$

$6x - 3 = 6x + 7$

$6x - 6x = 7 + 3$

$0x = 10$

وهذا غير ممكن لأن $0 \neq 10$

وبالتالي المعادلة لا تقبل حل .

لدينا $2x + 5 = 2(x + 1) + 3$

$2x + 5 = 2x + 2 + 3$

$2x - 2x = 5 - 5$

$0x = 0$

إذن مهما كان x فإن : $0 = 0$

وبالتالي جميع الأعداد الحقيقية حلول لهذه المعادلة

الحالة 2 : معادلات من نوع $(ax + b)(cx + d) = 0$

خاصية

a و b عددان حقيقيان : $a \times b = 0$ يعني $a = 0$ أو $b = 0$

حــل المعــــــــــــــادلتين التاليتين :

لدينا $(x + 1)(2x - 3) = 0$

تكافئ $2x - 3 = 0$ أو $x + 1 = 0$

إذن $x = \frac{3}{2}$ أو $x = -1$

وبالتالي المعادلة تقبل حلين هما -1 و $\frac{3}{2}$

لدينا $x^2 - 7x = 0$

يعني أن $x(x - 7) = 0$

المعادلة تكافئ $x - 7 = 0$ أو $x = 0$

إذن $x = 7$ أو $x = 0$

وبالتالي المعادلة تقبل حلين هما 0 و 7

الحالة 3 : معادلات تحتوي على كســــــــــــور

ملاحظة : عموماً لحل هذا النوع من المعادلات نوحد المقام .

حل المعـــــادلة : $\frac{2x+1}{5} = \frac{x-1}{3}$

$3 \times (2x+1) = 5 \times (x-1)$

$6x + 3 = 5x - 5$

$6x - 5x = -5 - 3$

$x = -8$

إذن المعادلة تقبل حل وحيد هو -8

حل المعـــــادلة : $\frac{2x+1}{5} - 2 = \frac{x-1}{3}$

$\frac{2x+1}{5} - \frac{2}{1} = \frac{x-1}{3}$

$\frac{3\times(2x+1)}{15} - \frac{15\times 2}{15} = \frac{5\times(x-1)}{15}$

$6x + 3 - 30 = 5x - 5$

$6x - 5x = -5 - 3 + 30$

$x = 22$

إذن المعادلة تقبل حل وحيد هو 22

الحالة 4 : معادلات من نوع $x^2 = a$

ملاحظة : لحل هذا النوع من المعادلات تذكر المتطابقة $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

خاصية

إذا كان $a = 0$ المعادلة تقبل حلاً وحيداً هو $x = 0$

إذا كان $a > 0$ المعادلة تقبل حلين هما $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$

إذا كان $a < 0$ المعادلة لا تقبل حل .

حل المعـــــادلة : $x^2 + 12 = 2$

$x^2 = 2 - 12$

$x^2 = -10$

إذن المعادلة لا تقبل حل لأن x^2 يكون دائماً موجباً أو منعدماً $x^2 \geq 0$

حل المعـــــادلة : $(2x-1)^2 - 9 = 0$

$(2x-1)^2 - 3^2 = 0$

$(2x - 1 + 3)(2x - 1 - 3) = 0$

$(2x+2)(2x-4) = 0$

$2x + 2 = 0$ أو $2x - 4 = 0$

$x = \frac{-2}{2}$ أو $x = \frac{4}{2}$

$x = -1$ أو $x = 2$

وبالتالي المعادلة تقبل حلين هما 2 و -1

الحالة 5 : حل معادلة بالتعميل إذا ماوجد عامل مشترك

حل المعادلة : $2x(x+\sqrt{2}) - \sqrt{3}(x+\sqrt{2}) = 0$

$(x+\sqrt{2})(2x - \sqrt{3}) = 0$

$x + \sqrt{2} = 0$ أو $2x - \sqrt{3} = 0$

$x = -\sqrt{2}$ أو $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

حل المعادلة: $7(x+2)^2 = (x+2)(x-1)$

$(x+2)\big(7(x+2)\big) - (x-1) = 0$

$(x+2)(7x + 14 - x + 1) = 0$

$(x+2)(6x+15) = 0$

$x = -2$ أو $x = \frac{-15}{6}$

إذن المعادلة تقبل حلين هما -2 و $\frac{-15}{6}$

الحالة 6 : حل معادلة بالنشر إذا لم يوجد عامل مشترك

حل المعادلة : $x(x+3) = x^2 - 15$

$$x^2 + 3x = x^2 - 15$$

$$x^2 - x^2 + 3x = -15$$

$$x = \frac{-15}{3}$$

$$x = -5$$

إذن المعادلة تقبل حل وحيد هو -5

حل : $-4(2x+1) + x = 2(-x+5)$

$$-8x - 4 + x = -2x + 10$$

$$-8x + x + 2x = 10 + 4$$

$$-5x = 14$$

$$x = \frac{14}{-5} = -\frac{14}{5}$$

إذن المعادلة تقبل حل وحيد هو $-\frac{14}{5}$

المســـــألة المرتبطة بالمعادلة :

لحل مسألة نتبع الخطوات التالية :

1) قراءة المسألة بتمعن وتأكد أن المعطيات كافية وفي علاقة في ما بينهم مثل (أحدهم يمثل الضعف- النصف- الربع- السدس – نفس - يزيد عن – ينقص عن.....) بالنسبة للمعطى الأخر.
2) اختيار المجهول x من السؤال المطروح .
3) استغلال معطيات نص المسالة وصياغة معادلة .
4) حل المعادلة .
5) التحقق من منطقية الحل .

يصرف أستاذ نصف أجرته في الكراء والمأكل والمشرب ، وثلثها يرسله إلى أمه وسبعها في اللباس والتنقل ويوفر بأعجوبة $150\ dh$. فما هي أجرتـــــه الشهرية ؟

اختيار المجهول : ليكن x أجرة هذا الأستاذ الشهرية .

صياغة المعادلة :

- ✓ بما أن نصف الأجرة يصرفه في الكراء والمأكل والمشرب هذا يمثل $\frac{x}{2}$
- ✓ والثلث يرسله إلى أمه هذا يمثل $\frac{x}{3}$
- ✓ والسبع يصرفه في اللباس والتنقل هذا يمثل $\frac{x}{7}$
- ✓ ويوفر $150\ dh$.

إذن مجموع المصاريف زائد ما يوفر يساوي أجرته الشهرية .

إذن المعادلة هي : $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{7} + 150 = x$

حل المعادلة : المعادلة تكافئ $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{7} + \frac{150}{1} = \frac{x}{1}$

$$\frac{21 \times x}{21 \times 2} + \frac{14 \times x}{14 \times 3} + \frac{6 \times x}{6 \times 7} + \frac{42 \times 150}{42 \times 1} = \frac{42 \times x}{42 \times 1}$$

$$\frac{21x}{42} + \frac{14x}{42} + \frac{6x}{42} + \frac{6300}{42} = \frac{42x}{42}$$

$$21x + 14x + 6x + 6300 = 42x$$

$$41x + 6300 = 42x$$

$$41x - 42x = -6300$$

$$-x = -6300$$

$$x = 6300$$

<u>**الرجوع إلى المسألة والتحقق من الحل :**</u> إذا كان $x = 6300$ فإن :

$$\frac{6300}{2} + \frac{6300}{3} + \frac{6300}{7} + 150 = 3150 + 2100 + 900 + 150 = 6300$$

وبالتالي أجرة هذا الأستاذ الشهرية هي $6300\ dh$

مســـــــألة : الإمتحان الجهوي لجهة مكناس-تافيلالت دورة يونيو 2014 .

حدد عدد تلاميذ ثانوية إعدادية إذا علمت أن نصفهم يدرسون بمستوى الأولى الأعدادي ، وربعهم بمستوى الثانية و70 تلميذاً يدرسون بمستوى الثالثة إعدادي .

II. المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد :

تعريف

- ✓ المتراجحة أو المتباينة هي جملة رياضية تضم $> ; \geq ; < ; \leq ; \neq$.
- ✓ المتراجحة $ax + b > 0$ تسمى متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد .

ملاحظة :

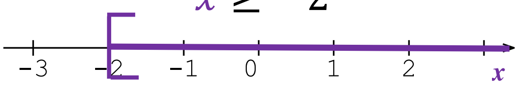
❖ حل المتراجحة هو أي قيمة ل x تجعل المتراجحة صحيحة .

على سبيل المثال : -2 و -1 و 0 و 1 و $70\,000$ هي حلول للمتراجحة $x \geq -2$

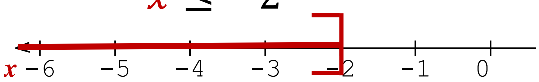
على سبيل المثال : -1 و 0 و 1 و $70\,000$ هي حلول للمتراجحة $x > -2$

تمثيل حلول متراجحة على مستقيم مدرج :

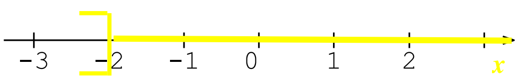
$x \geq -2$



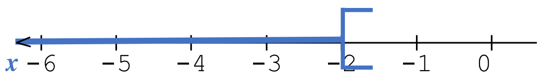
$x \leq -2$



$x > -2$



$x < -2$



الحالة 1 : إذا كان $a > 0$ فإن حلول المتراجحة $ax + b < 0$ هي $x < \frac{-b}{a}$

حل المتراجحة : $4x - 5 \leq 2x + 3$

$4x - 2x \leq 3 + 5$

$2x \leq 8$

$x \leq \frac{8}{2}$

$x \leq 4$

إذن حلول المتراجحة هي مجموعة الأعداد الأكبر أو تساوي 4

حل المتراجحة : $3(x - 1) > x + 5$

$3x - 3 > x + 5$

$3x - x > 5 + 3$

$2x > 8$

$x > 4$

إذن حلول المتراجحة هي مجموعة الأعداد الأكبر قطعاً من 4

الحالة 2 : إذا كان $a < 0$ فإن حلول المتراجحة $ax + b < 0$ هي $x > \frac{-b}{a}$ نقلب الرمز

حل المتراجحة : $2x - 6 \geq 7x - 1$

$2x - 7x \geq -1 + 6$

$-5x \geq 5$

$x \leq \frac{5}{-5}$ نزل 5 – وأقلب الرمز

$x \leq -1$

إذن حلول المتراجحة هي مجموعة الأعداد الأصغر أو تساوي -1

حل المتراجحة : $\frac{x}{-3} > 2$

$-3 \times \frac{x}{-3} < -3 \times 2$

$x < -6$

إذن حلول المتراجحة هي مجموعة الأعداد الأصغر قطعاً من -6

حل المتراجحة : $\frac{x}{2} + \frac{3-4x}{3} > 1$

نوحد المقام $\frac{3x}{6} + \frac{2(3-4x)}{6} > \frac{6}{6}$

$3x + 6 - 4x > 6$

$3x - 4x > 6 - 6$

بما أن $-x > 0$

فإن $x < 0$

إذن الحلول المتراجحة هي مجموعة الأعداد الأصغر قطعاً من 0

الحالة 3 : متراجحات لاتقبل حل

حل المتراجحة : $\frac{2x-5}{3} - \frac{x+1}{2} \geq \frac{x}{6}$

$\frac{2(2x-5)}{6} - \frac{3(x+1)}{6} \geq \frac{x}{6}$

$\frac{4x-10-3x-3}{6} \geq \frac{x}{6}$

$4x - 3x - x \geq 10 + 3$

$0x \geq 13$ وهذا غير ممكن لأن $0 \leq 13$

إذن المتراجحة ليس لها حل

الحالة 4 : متراجحات لها ما لانهاية من الحلول

حل المتراجحة : $5(2x - 1) - 7x < 3(x + 1)$

$10x - 5 - 7x < 3x + 3$

$10x - 7x - 3x < 3 + 5$

$0x < 8$

وهذا ممكن لأن مهما كان x فإن $0 < 8$

إذن المتراجحة لها ما لا نهاية من الحلول .

المســــألة المرتبطة بالمتراجحة :

ممون الحفلات يقترح الصيغتين التاليتين لكراء الأواني :

<u>الصيغة الأولى :</u> $100dh$ إضافة إلى $30dh$ للساعة الواحدة .

<u>الصيغة الثانية :</u> $200dh$ إضافة إلى $20dh$ للساعة الواحدة .

1) تريد استغلال الأواني لمدة 6 ساعات أي الصيغتين تختار ؟
2) حدد عدد الساعات الممكنة بحيث تكون للصيغتين المقترحتين نفس الكلفة ؟
3) حدد عدد الساعات الممكنة بحيث تكون الصيغة الأولى أقل كلفة ؟

ملاحظة :

عندما نستخدم تعبيراً مثل (على الأقل – أكثر من – أفضل – أدنى – أقصى ...) فإننا نتكلم عن متراجحة .

1) ليكن x عدد الساعات إذن :

الصيغة 1 هي : $30x + 100 = 30 \times 6 + 100 = 280\ dh$

الصيغة 2 هي : $20x + 200 = 20 \times 6 + 200 = 320\ dh$

بما أن $280dh < 320dh$ إذن سأختار الصيغة 1

2) تكون للصيغتين نفس الكلفة إذا كان : $30x + 100 = 20x + 200$

$$30x - 20x = 200 - 100$$

يعني أن $10x = 100$

إذن $x = \frac{100}{10} = 10$

التحقق من المعادلة : إذا كان $x = 10$ فإن تكلفة :

الصيغة 1 هي : المبلغ $= 30 \times 10 + 100 = 400\ dh$

الصيغة 2 هي : المبلغ $= 20 \times 10 + 200 = 400\ dh$

وبالتالي عدد الساعات لتكون للصيغتين نفس الكلفة هو 10 .

3) تكون الصيغة 1 أقل تكلفة من الصيغة 2 ، إذا كان $30x + 100 < 20x + 200$

يعني أن $30x - 20x < 200 - 100$

إذن $10x < 100$

ومنه $x < 10$

إذن ستصبح الصيغة 1 أقل كلفة من الصيغة 2 عندما يكون عدد ساعات استغلال الأواني أقل من 10 ساعات.