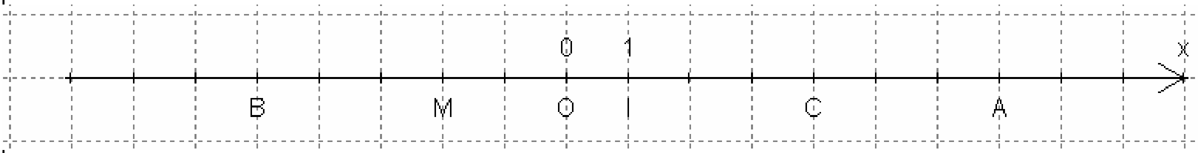
المعلم في المستـــــــوى

نشاط تمهيدي

نعتبر الشكل الآتي بحيث $D(O,I)$ مستقيم مدرج .



1 . حدد أفصول النقط A و C و M و B .

2 . أحسب المسافات OI و OC و OA

3 . أحسب المسافات IC و CA

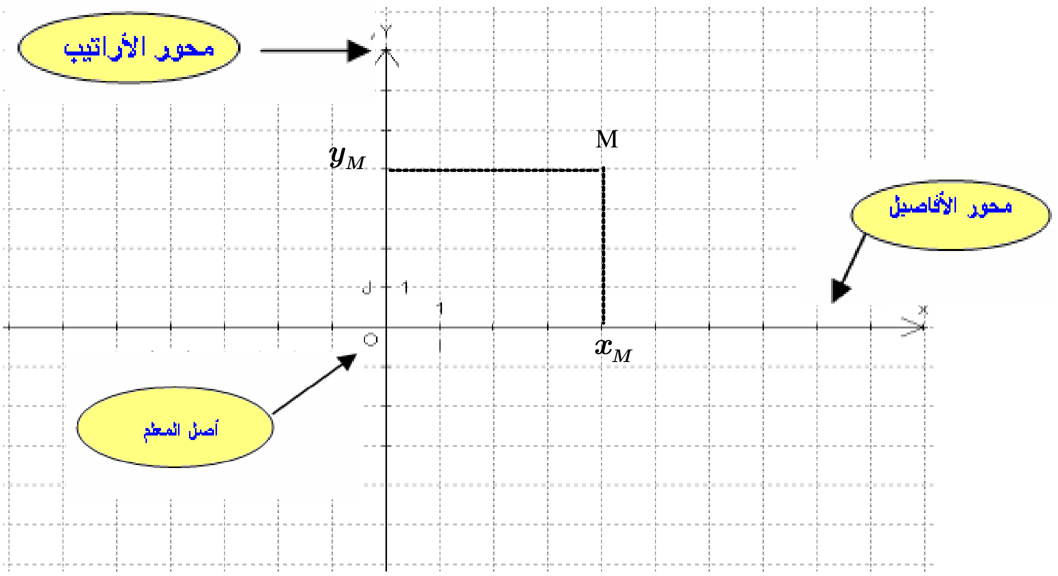
4 . أستنتج أن C منتصف القطعة $[IA]$.

5 . تحقق أن $x_C = \dfrac{x_A + x_I}{2}$.

I. المعلم في المستوى - إحداثيتي نقطة

تعريف 1

نعتبر الشكل أسفله بحيث $D(O,I)$ و $\Delta(O,J)$ مستقيمين مدرجين متعامدين في النقطة O



مصطلحات

. المثلوث (O,I,J) يسمى معلما متعامدا للمستوى .

. النقطة O تسمى أصل المعلم المتعامد (O,I,J) .

. المستقيم المدرج $D(O,I)$ يسمى محور الأفاصيل .

. المستقيم المدرج $\Delta(O,J)$ يسمى محور الأراتيب .

. الزوج (x_M,y_M) يسمى زوج إحداثيتي النقطة M و نكتب $M(x_M,y_M)$ أ و $M\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$

. العدد الحقيقي x_M يسمى أفصول النقطة M والعدد الحقيقي y_M يسمى أرتوب النقطة M .

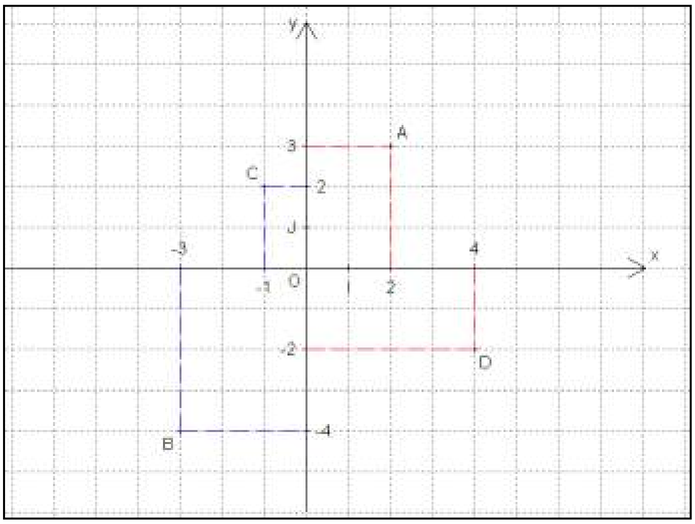
حالة خاصة

إذا كان في المعلم المتعامد (O,I,J)، $OI = OJ = 1$ فإن (O,I,J) يسمى معلم متعامد ممنظم .

تطبيق 1

مثل في معلم متعامد (O,I,J) النقط $A(2,3)$ و $B(-3,-4)$ و $C(-1,2)$ و $D(4,-2)$

الحل



ملاحظة

. جميع النقط التي تنتمي إلى محور الأفاصيل أراتبها تساوي 0 .

. جميع النقط التي تنتمي إلى محور الأراتيب أفاصلها تساوي 0 .

تطبيق 2

حدد قيمة العدد y علما أن النقطة $M(2,2y+1)$ تنتمي إلى محور

حل التطبيق 2

. لنحدد قيمة العدد الحقيقي y .

لدينا $M(2,2y+1) \in (OI)$

يعني $y_M = 0$ يعني $2y+1=0$ يعني $2y+1+(-1) = 0+(-1)$

يعني $2y=-1$ يعني $\frac{1}{2}\times 2y = \frac{1}{2}\times(-1)$ يعني $y = -\frac{1}{2}$

II. إحداثيتي متجهة .

خاصية1

(O,I,J) معلم متعامد للمستوى.

إذا كانت $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ نقطتين من المستوى فإن إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هما $x_B - x_A$ و $y_B - y_A$. و نكتب $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

تطبيق 3

حدد إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{AB}$ علما أن $A(2,3)$ و $B(-3,-4)$.

. لنحدد إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{AB}$

نعلم أن $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$

ت.ع $\overrightarrow{AB}(-3-2,-4-3)$

ومنه $\overrightarrow{AB}(-5,-7)$

III. تســـــاوي متجهتين

خاصية2

(O,I,J) معلم متعامد للمستوى.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF}$ يعني $\begin{cases} x_B - x_A = x_F - x_E \\ y_B - y_A = y_F - y_E \end{cases}$

تطبيق 4

في معلم متعامد (O,I,J) نعتبر النقط :

$A(x-1;3)$ و $B(4;-5)$ و $C(1;0)$ و $D(2;y-2)$.

علما أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ حدد قيمتي x و y.

الحل

لدينا $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

تعني $x_B - x_A = x_C - x_D$ و $y_B - y_A = y_C - y_D$

ت.ع $4-x=1-2$ و $-5-3=0-(y-2)$

تكافئ $4-x=-1$ و $-8=-y+2$

تكافئ $x=1+4=5$ و $y=8+2=10$

إصطلاح : نقبل أن كيفما كان الزوج (A,B) توجود متجهة $\vec{u}$ من المستوى المتجهي حيث $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$.

IV. إحداثيتي مجموع متجهتين

خاصية3

(O,I,J) معلم متعامد للمستوى .

إذا كان $\vec{u}(a;b)$ و $\vec{v}(x;y)$ فإن $\vec{u}+\vec{v}(a+x;b+y)$

تطبيق 5

في معلم متعامد (O,I,J) نعتبر النقط $A(2;-1)$ و $B(3;5)$ و $D(-3;7)$ و $C(x;y)$

1 – حدد العددين x و y علما أن $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

2– $M(-7,21)$ بين أن $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

الحل

1- لنحدد قيم العددين الحقيقيين x و y

لدينا $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

إذن $x_{\overrightarrow{AC}}=x_{\overrightarrow{AB}}+x_{\overrightarrow{AD}}$ و $y_{\overrightarrow{AC}}=y_{\overrightarrow{AB}}+y_{\overrightarrow{AD}}$

يعني $x_C - x_A = x_B - x_A + x_D - x_A$

و $y_C - y_A = y_B - y_A + y_D - y_A$

ت.ع $x-2=3-2+(-3)-2$

و $y-(-1)=5-(-1)+7-(-1)$

يعني $x-2=-4$ و $y+1=14$

يعني $x=-4+2$ و $y=14-1$

يعني $x=-2$ و $y=13$

2 – لنبين أن $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

لدينا $\overrightarrow{DM}=(x_M-x_D)\overrightarrow{OI}+(y_M-y_D)\overrightarrow{OJ}$

تطبيق عددي $\overrightarrow{DM}=(-7+3)\overrightarrow{OI}+(21-7)\overrightarrow{OJ}$

يكافئ $\overrightarrow{DM}=-4\overrightarrow{OI}+14\overrightarrow{OJ}$

ومنه $\overrightarrow{DM}(-4,14)$

من جهة أخرى حسب السؤال 1 لدينا

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=-4\overrightarrow{OI}+14\overrightarrow{OJ}$

و منه $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}(-4,14)$

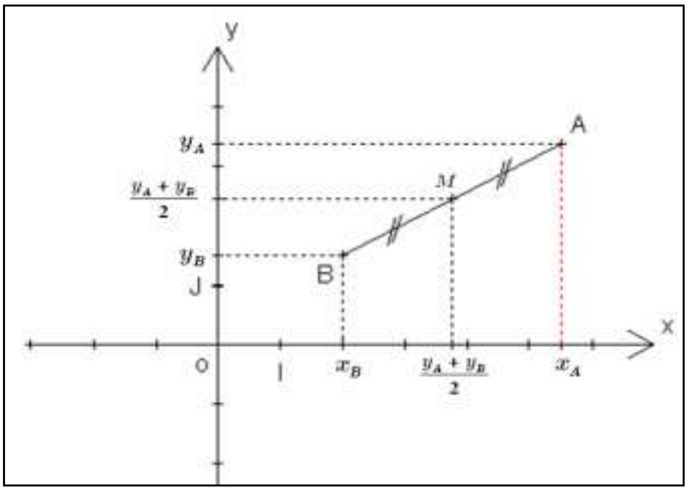
وبالتالي $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

٧. إحداثيتي منتصف قطعة .

خاصية4

إذا كانت $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ نقطتين من المستوى.

فإن إحداثيتي منتصف القطعة $[AB]$ هما $\dfrac{x_A+x_B}{2}$ و $\dfrac{y_A+y_B}{2}$.



أفصول منتصف قطعة هو نصف مجموع أرتوبي طرفيها و أرتوب منتصف قطعة هو نصف مجموع أرتوبي طرفيها.

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}$$

$$y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$$

تطبيق 6

في معلم متعامد (O,I,J) نعتبر النقطتين $A(2;-1)$ و $B(3;5)$.

1- حدد إحداثيتي I منتصف $[AB]$.

2- حدد إحداثيتي النقطة N حيث A منتصف القطعة $[NB]$.

الحل

. لنحدد إحداثيتي I منتصف $[AB]$.

لدينا I منتصف $[\mathrm{AB}]$.

إذن $x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}$ و $y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}$

ت.ع $x_I=\dfrac{2+3}{2}=\dfrac{5}{2}$ و $y_I=\dfrac{-1+5}{2}=\dfrac{4}{2}=2$

ومنه $I\left(\dfrac{5}{2};2\right)$

لنحدد إحداثيتي النقطة N

لدينا A منتصف $[\mathrm{BN}]$.

إذن $2x_A=x_N+x_B$ و $2y_A=y_N+y_B$

ت.ع $2\times 2=x_N+3$ و $2\times 5=y_N-1$

يعني $4=x_N+3$ و $10=y_N-1$

يعني $x_N=4-3=1$ و $y_N=10+1=11$

VI. المسافة بين نقطتين في معلم متعامد ممنظم

خاصية5

إذا كان في معلم متعامد ممنظم $(\mathrm{O,I,J})$ $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$

فـإن $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

إشارة : العلاقة أعلاه خاصة بالمعلم المتعامد الممنظم ($OI=OJ=1$)

لنبرهن أن $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

في الشكل جانبه لدينا المثلث ABC قائم الزاوية في الرأس C ، حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة :

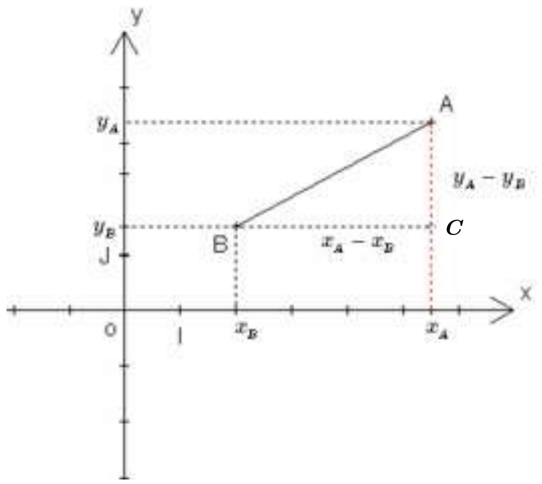
$BC^2+AC^2=AB^2$ أي

$(x_A-x_B)^2(OI)^2+(y_A-y_B)^2(OI)^2=AB^2$

بما أن $OI=OJ=1$ فإن

$(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2=AB^2$

[illegible] $\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=AB$



تطبيق7

في معلم متعامد ممنظم (O,I,J) نعتبر النقطتين $A(2;-1)$ و $B(3;5)$ و $C(x,5)$

1 – أ حسب AB .

2 – حدد قيم x من أجل $AC^2=AB^2$.

الحل

1 – لنحسب AB .

لدينا (O,I,J) معلم متعامد ممنظم للمستوى

إذن $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

ت . ع $AB=\sqrt{(3-2)^2+(5-(-1))^2}$

تكافئ $AB=\sqrt{1^2+6^2}=\sqrt{1+36}$

ومنه $AB=\sqrt{36}$

2 – لنحدد قيم x من أجل $AC^2=AB^2$

لدينا $AC^2=AB^2$

يكافئ $\left(\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}\right)^2=\left(\sqrt{37}\right)^2$

يكافئ $(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2=37$

يكافئ $(x-2)^2+(5+1)^2=37$

يكافئ $(x-2)^2+(6)^2=37$

يكافئ $(x-2)^2+36=37$

يكافئ $(x-2)^2+36+(-36)=37+(-36)$

يكافئ $(x-2)^2=1$

يكافئ $(x-2)^2-1=0$

يكافئ $(x-2+1)(x-2-1)=0$

يكافئ $(x-1)(x-3)=0$

يكافئ $x-1=0$ أو $x-3=0$

يكافئ $x-1+1=0+1$ أو $x-3+3=0+3$

يكافئ $x=1$ أو $x=3$

في حالة $x=1$:

$AC^2=(1-2)^2+(5+1)^2=1+36=37$

في حالة $x=3$

$AC^2=(3-2)^2+(5+1)^2=1+36=37$

ملاحظة

في معلم متعامد ممنظم إذا كان $\overrightarrow{MN}(a;b)$ فإن $MN=\sqrt{a^2+b^2}$