الدرس ③ : المعلم في المستوى

I - إحداثيتا نقطة:

1) المعلم في المستوى:

* مثال:

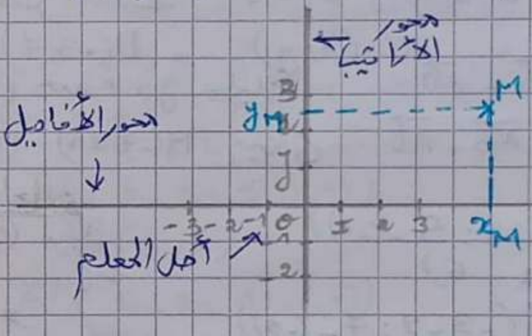
O و I و J ثلاث نقط من المستوى

بحيث $(OI)\perp(OJ)$ و $OI = OJ = 1$

* المعلم (O,I,J) يسمى معلم متعامد ممنظم

نقول أن المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم.

* النقطة O تسمى أصل المعلم
* المستقيم (OI) يسمى محور الأفاصيل.
* المستقيم (OJ) يسمى محور الأراتيب.



2) إحداثيتا نقطة:

أ - تعريف:

كل نقطة M من المستوى مرتبطة بزوج (x_M, y_M) يسمى زوج إحداثيتي النقطة M.

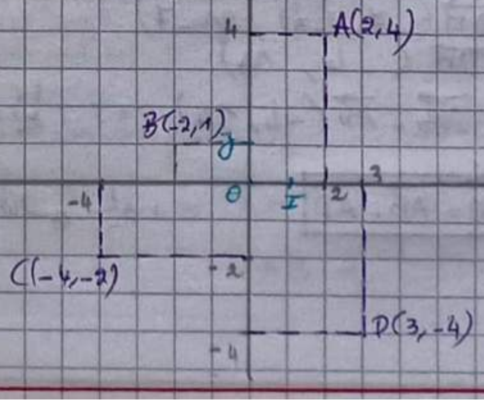
x_M: يسمى أفصول M و y_M يسمى أرتوب M

ونكتب $M(x_M, y_M)$

ب - مثال:

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم.

لنمثل النقط الآتية: $A(2,3)$ و $B(-2,1)$ و $C(-4,-2)$ و $D(3,-4)$



ج - ملاحظات هامة:

* (O,I,J) معلم متعامد ممنظم إذن: $O(0,0)$ و $I(1,0)$ و $J(0,1)$
* إذا كانت M تنتمي لمحور الأفاصيل فإن $y_M=0$ ونكتب $M(x_M;0)$
* إذا كانت M تنتمي لمحور الأراتيب فإن $x_M=0$ ونكتب $M(0,y_M)$

3) إحداثيتي منتصف قطعة:

أ - تعريف:

نعتبر $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$

إذا كانت M منتصف القطعة $[AB]$ فإن $x_M = \frac{x_A+x_B}{2}$ و $y_M = \frac{y_A+y_B}{2}$

ونكتب: $M\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$

ب - مثال:

نعتبر $A(2,3)$ و $B(-2,1)$

لنحدد إحداثيتي E منتصف القطعة $[AB]$

لدينا: $x_E = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{2+(-2)}{2} = \frac{0}{2} = 0$ و $y_E = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

إذن: $\boxed{E(0,2)}$

ج - تمرين تطبيقي:

نعتبر في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم النقط التالية:

$A(-2,1)$ و $B(2,2)$ و $C(3,-2)$ و $D(x,y)$

1) حدد إحداثيتي E منتصف القطعة $[AC]$
2) حدد x و y علما أن E منتصف القطعة $[BD]$

الحل:

1) E منتصف $[AC]$ إذن: $E\left(\frac{3+(-2)}{2}, \frac{-2+1}{2}\right)$

ومنه: $E\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

2) E منتصف $[BD]$ إذن: $E\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+2}{2}\right)$

ومنه $\frac{x+2}{2} = \frac{1}{2}$ و $\frac{y+2}{2} = \frac{-1}{2}$

أي أن $x=-1$ و $y=-3$ ومنه $\boxed{D(-1,-3)}$

II - إحداثيتا متجهة :

1) إحداثيتا متجهة :

أ- تعريف :

في معلم متعامد ممنظم (O,I,J) نعتبر النقطتين $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$

إحداثيتا المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هما $x_B - x_A$ و $y_B - y_A$

ونكتب : $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$

ب- مثال :

نعتبر النقطتين $A(5,-4)$ و $B(-3,4)$

لنحدد إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{AB}$

لدينا : $\overrightarrow{AB}(-3-5, 4-(-4))$

إذن $\overrightarrow{AB}(-8, 8)$

2) تساوي متجهتين :

أ- خاصية ① :

في معلم متعامد ممنظم (O,I,J) نعتبر المتجهتين $\overrightarrow{AB}(a,b)$ و $\overrightarrow{CD}(x,y)$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ يعني أن $a = x$ و $b = y$

أي تكون متجهتان متساويتان إذا كانت لهما نفس الإحداثيات.

ب- مثال :

نعتبر النقط $A(3,3)$ و $B(1,-4)$ و $C(-2,-2)$

لنحدد إحداثيتي النقطة D لكي يكون $ABCD$ متوازي أضلاع

$ABCD$ متوازي أضلاع يعني أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

يعني أن $\begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \end{cases}$

يعني أن $\begin{cases} 1-3 = -2 - x_D \\ -4-3 = -2 - y_D \end{cases}$

يعني أن : $\begin{cases} x_D = -2+2 = 0 \\ y_D = -2+7 = 5 \end{cases}$

وبالتالي فإن : $D(0,5)$

3) إحداثيتا مجموع وفرق متجهتين :

أ- خاصية ② :

نعتبر المتجهتين $\overrightarrow{AB}(a,b)$ و $\overrightarrow{CD}(x,y)$

لدينا : $\begin{cases} \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}(a+x, b+y) \\ \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}(a-x, b-y) \end{cases}$

ب- أمثلة :

نعتبر المتجهتين $\overrightarrow{AB}(3,-1)$ و $\overrightarrow{CD}(2,-4)$

لدينا : * $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}(3+2, -1+(-4))$

إذن $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}(5; -5)$

ولدينا : * $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}(3-2; -1-(-4))$

إذن $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}(1,3)$

ج- تمرين تطبيقي :

نعتبر النقط $A(2;-1)$ و $B(3;5)$ و $D(-3;7)$ و $C(x;y)$

1) حدد x و y علما أن : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

2) بين أن $M(-7,21)$: $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

الحل :

1) لدينا : $\overrightarrow{AB}(3-2; 5-(-1))$

إذن $\overrightarrow{AB}(1,6)$

و $\overrightarrow{AD}(-3-2; 7-(-1))$

$\overrightarrow{AD}(-5, 8)$

ولدينا : $\overrightarrow{AC}(x-2, y+1)$

ولدينا : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}(1+(-5), 6+8)$

إذن : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}(-4, 14)$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ يعني أن : $\begin{cases} x-2 = -4 \\ y+1 = 14 \end{cases}$

إذن $\begin{cases} x = -4+2 = -2 \\ y = 14-1 = 13 \end{cases}$

إذن : $\boxed{C(-2;13)}$

2) $D(-3,7)$ و $M(-7,21)$

إذن : $\overrightarrow{DM}(-7-(-3), 21-7)$

$\overrightarrow{DM}(-4, 14)$

ولدينا : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}(-4, 14)$

وبالتالي نجد : $\boxed{\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}$

4) إحداثيتا جداء متجهة في عدد حقيقي

أ- خاصية ③ :

نعتبر المتجهة $\overrightarrow{AB}(a,b)$ و k عدد حقيقي

لدينا: $k\overrightarrow{AB}(ka\,;\,kb)$

ب- مثال :

نعتبر المتجهة $\overrightarrow{AB}(3,-1)$

لدينا: $2\overrightarrow{AB}(2\times3\,;\,2\times(-1))$

إذن: $2\overrightarrow{AB}(6,-2)$

ولدينا: $-4\overrightarrow{AB}(-4\times3\,;\,-4\times(-1))$

إذن: $-4\overrightarrow{AB}(-12\,;\,4)$

ج- تمرين تطبيقي:

نعتبر النقط $A(2;-1)$ و $B(3;5)$ و $C(4,11)$

بين أن النقط A و B و C مستقيمية

الحل: من أجل ذلك نبين أن المتجهتان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقيميتان أي أن $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$

لدينا: $\overrightarrow{AB}(3-2\,;\,5-(-1))$

إذن $\overrightarrow{AB}(1,6)$

ولدينا: $\overrightarrow{AC}(4-2\,;\,11-(-1))$

إذن $\overrightarrow{AC}(2\,;\,12)$

لدينا: $2\overrightarrow{AB}(2,12)$

إذن: $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$

وبالتالي فإن النقط A و B و C مستقيمية.

III- المسافة بين نقطتين:

1) خاصية ④ :

في معلم متعامد ممنظم إذا كانت: $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$

فإن: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

*** ملاحظة هامة:**

إذا كانت $\overrightarrow{AB}(x,y)$ فإن: $\boxed{AB=\sqrt{x^2+y^2}}$

2) مثال:

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر النقطتين $A(-2;3)$ و $B(-5;7)$

لنحسب المسافة AB

*** الطريقة ① :**

لدينا: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

$=\sqrt{(-5-(-2))^2+(7-3)^2}=\sqrt{(-3)^2+4^2}$

$=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

وبالتالي $\boxed{AB=5}$

*** الطريقة ② :** في حالة حساب إحداثيات $\overrightarrow{AB}$

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-5-(-2),7-3)$

$\overrightarrow{AB}(-3;4)$

إذن: $AB=\sqrt{(-3)^2+4^2}$

$=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}$

وبالتالي فإن: $\boxed{AB=5}$

3) تمرين تطبيقي:

في معلم متعامد ممنظم نعتبر النقط $A(1,5)$ و $B(3,9)$ و $C(11,5)$ و $D(9,1)$

بين أن الرباعي $ABCD$ مستطيل.

الحل:

* لدينا: $\overrightarrow{AB}(3-1,9-5)$

$\overrightarrow{AB}(2,4)$

و $\overrightarrow{DC}(11-9,5-1)$

$\overrightarrow{DC}(2,4)$

إذن: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ أي أن $ABCD$ متوازي أضلاع

* ولدينا لنبين أن ABC مثلث قائم الزاوية في B

لدينا: $\overrightarrow{BC}(11-3;5-9)$

$\overrightarrow{BC}(8;-4)$

و $\overrightarrow{AC}(11-1\,;\,5-5)$

$\overrightarrow{AC}(10\,;\,0)$

لدينا: $AB=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$ و $BC=\sqrt{8^2+(-4)^2}=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}$

$AC=\sqrt{10^2+0^2}=\sqrt{100}=10$

لدينا: $AC^2=AB^2+BC^2$

إذن حسب مبرهنة فيتاغورس العكسية فإن المثلث ABC قائم الزاوية في B

وبالتالي فإن: $ABCD$ مستطيل.