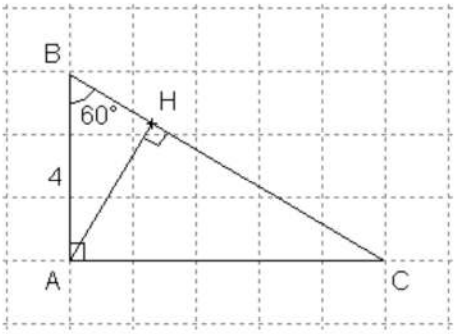
الحساب المثلثي

نشاط تمهيدي



نعتبر الشكل جانبه حيث $AB=4$ و $A\hat{B}C=60°$

1 – أحسب HB و CB علما أن $Cos60°=\frac{1}{2}$.

2 – أحسب AC.

3 – بين أن $AH=\frac{1}{2}AC$.

4 – إستنتج AH.

5 – تحقق أن $\frac{AH}{AB}=\frac{AC}{BC}$.

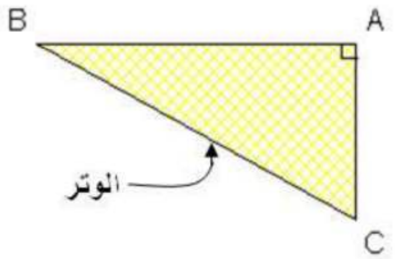
I. جيب تمام زاوية حادة

تعريف 1

ABC مثلث قائم الزاوية في A.

جيب تمام الزاوية $[A\hat{B}C]$ هو خارج طول الضلع المحادي للزاوية $[A\hat{B}C]$ على طول الوتر ,

و نرمز له بالرمز $CosA\hat{B}C$ ، و نكتب $CosA\hat{B}C=\frac{AB}{BC}$.



في الشكل جانبه ABC مثلث قائم الزاوية في A

– $[AB]$ هو الضلع المحادي للزاوية $[A\hat{B}C]$

– $[AC]$ هو الضلع القابل للزاوية $[A\hat{B}C]$

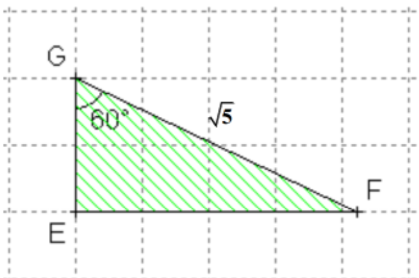
$CosA\hat{B}C=\frac{AB}{BC}$

تطبيق 1

نعتبر الشكل أسفله حيث $GF=\sqrt{5}$

و $E\hat{G}F=60°$ علما أن $cos\,60°=\frac{1}{2}$

أحسب GE و EF



الحل

لنحسب GE .

لدينا EFG مثلث قائم الزاوية في E

إذن $\cos E\hat{G}F=\frac{EG}{GF}$

تطبيق عددي $\cos 60°=\frac{EG}{\sqrt{5}}$

يعني $\frac{1}{2}=\frac{EG}{\sqrt{5}}$

يعني $EG=\frac{1\times\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

. لنحسب EF

لدينا EFG مثلث قائم الزاوية في E، حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة : $EG^2+EF^2=FG^2$

تطبيق عددي $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+EF^2=\left(\sqrt{5}\right)^2$

يعني $\frac{5}{4}+EF^2=5$ يعني $EF^2=5-\frac{5}{4}$ يعني $EF^2=\frac{15}{4}$

و بماأن $EF>0$ فإن $EF=\sqrt{\frac{15}{4}}=\frac{\sqrt{15}}{2}$

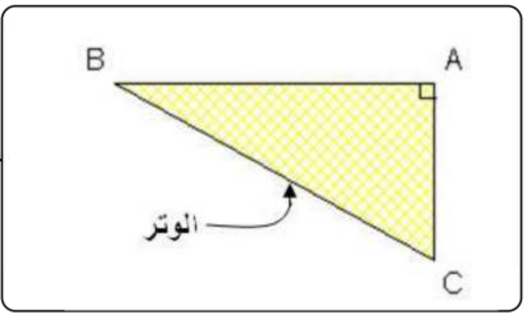
II. جيب زاوية حـــادة .

تعريف 2

ABC مثلث قائم الزاوية في A.

جيب الزاوية $[\hat{ABC}]$ هو خارج طول الضلع المقابل للزاوية $[\hat{ABC}]$ على طول الوتر ,

و نرمز له بالرمز $Sin\hat{ABC}$ ، و نكتب $Sin\hat{ABC}=\frac{AC}{BC}$.



في الشكل جانبه ABC مثلث قائم الزاوية في A

– $[AB]$ هو الضلع المحادي للزاوية $[\hat{ABC}]$

– $[AC]$ هو الضلع القابل للزاوية $[\hat{ABC}]$

$Sin\hat{ABC}=\frac{AC}{BC}$

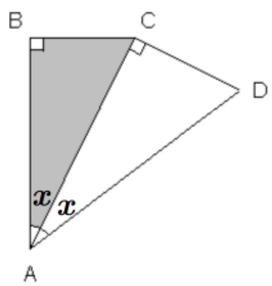
تطبيق 2

نعتبر الشكل جانبه. نضع $\hat{BAC}=\hat{CAD}=x$

1 – أكتب تعبير $Sinx$ في المثلث ABC ثم في المثلث ACD.

2 – استنتج أن $CD\times AC=AD\times BC$.

3 – إذا علمت أن $AD=5$ و $CD=3$ أحسب AC و BC.



الحل

1 – تعبير $Sinx$ في المثلث ABC .

لدينا ABC قائم الزاوية في B إذن $sin\ x=\frac{BC}{AC}$

. تعبير $Sinx$ في المثلث في ACD .

لدينا ADC قائم الزاوية في C إذن $sin\ x=\frac{DC}{AD}$

2 – استنتج أن $CD \times AC = AD \times BC$.

لدينا حسب السؤال 1 $\sin x = \frac{BC}{AC}$

و $\sin x = \frac{DC}{AD}$ إذن $\frac{DC}{AD} = \frac{BC}{AC}$

يعني $DC \times AC = AD \times BC$.

3 – إذا علمت أن $AD = 5$ و $CD = 3$

أحسب AC و BC .

. لنحسب AC

نعتبر المثلث ADC القائم الزاوية في C

حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة لدينا

$AD^2 = AC^2 + CD^2$

ت.ع $5^2 = AC^2 + 3^2$

تكافئ $25 = AC^2 + 9$

تكافئ $AC^2 = 25 - 9 = 16$

و بماأن $AC > 0$ فإن $AC = \sqrt{16} = 4$

. لنحسب BC

لدينا حسب السؤال 2 $DC \times AC = AD \times BC$

ت.ع $3 \times 4 = 5 \times BC$

تكافئ $5BC = 12$

تكافئ $BC = \frac{12}{5}$

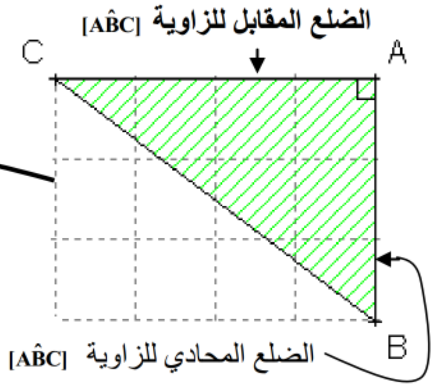
III. ظل زاوية حادة

تعريف 3

ABC مثلث قائم الزاوية في A .

ظل الزاوية $[A\hat{B}C]$ هو خارج طول الضلع المقابل للزاوية $[A\hat{B}C]$ على طول الضلع المحادي.

و نرمز له بالرمز $Tan A\hat{B}C$ أو $Tg A\hat{B}C$ و نكتب $Tan A\hat{B}C = \frac{AC}{AB}$



$$Tan A\hat{B}C = \frac{AC}{AB}$$

$$Tan\ A\hat{C}B = \frac{AB}{AC}$$

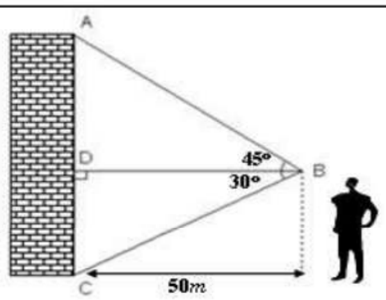
تطبيق3

مشاهد على بعد $50m$ من الحائط يرى قمته بزاوية $45°$.

و أسفله بزاوية $30°$. (أنظر الشكل جانبه)

علما أن $\tan 45° = 1$ و $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

أحسب ارتفاع هذا الحائط .



الحل

ليكن h هو إرتفاع الحائط لدينا $h = AD + DC$ لنحسب AD . نعتبر المثلث ABD القائم الزاوية في D لدينا $tgA\hat{B}D = \frac{AD}{BD}$ ت.ع $tg45° = \frac{AD}{50}$ تكافئ $AD = tg45° \times 50 = 1 \times 50 = 50m$	لنحسب DC . نعتبر المثلث BDC القائم الزاوية في D . لدينا $tgC\hat{B}D = \frac{DC}{BD}$ ت.ع $tg30° = \frac{CD}{50}$ تكافئ $CD = tg30° \times 50 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 50 = 28.86$ و منه $h = 50 + 28.86 = 78.86m$

IV. خـــــاصـــــيـــــات

خاصية 1

ليكن α قياس زاوية حادة. لدينا $0 \prec \cos\alpha \leq 1$ و $0 \leq \sin\alpha \prec 1$

تطبيق4

α قياس زاوية حادة غير منعدمة. أ طر التعبير $\sqrt{3}\sin^2\alpha - 2\sqrt{3}\cos\alpha$

الجواب

. لنؤطر التعبير $\sqrt{3}\sin^2\alpha - 2\sqrt{3}\cos\alpha$

بما أن α قياس زاوية حادة غير منعدمة فإن $0 < \cos\alpha < 1$ و $0 < \sin\alpha < 1$

إذن $0 < 2\sqrt{3}\cos\alpha < 2\sqrt{3}$ و $0 \leq \sin^2\alpha < 1^2$

يعني $-2\sqrt{3} < -2\sqrt{3}\cos\alpha < 0$ و $0 < \sqrt{3}\sin^2\alpha < \sqrt{3}$

ومنه $-2\sqrt{3} \leq \sqrt{3}\sin^2\alpha - 2\sqrt{3}\cos\alpha \leq \sqrt{3}$

خاصية 2

ليكن α قياس زاوية حادة.

لدينا $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

إستنتاج

إذا كـان α قياس زاوية حادة .

فإن $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ و $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$.

تطبيق5

α قياس زاوية حادة . علما أن $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ أحسب $\cos\alpha$.

الجواب

1 – لنحسب $\cos\alpha$

نعلم أن $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

يعني $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

ت.ع $\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{2^2} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

و بما أن $0 \prec \cos\alpha \leq 1$ فإن $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{4}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$

خاصية 3

ليكن α قياس زاوية حادة غير منعدمة . لدينا $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

إستنتاج

إذا كان α قياس زاوية حادة غير منعدمة .

فإن $\sin\alpha = \cos\alpha \times \tan\alpha$ و $\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$

تطبيق6

α قياس زاوية حادة . علما أن $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ أحسب $\cos\alpha$ و $\tan\alpha$.

1 – لنحسب $\cos\alpha$

نعلم أن $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

يعني $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

ت.ع $\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1^2}{2^2}$

يعني $\cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

و بما أن $0 < \cos\alpha \leq 1$ فإن

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

. لنحسب $\tan\alpha$

نعلم أن $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

ت . ع $\tan\alpha = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ومنه $\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

يمكنك البرهان على العلاقة:

$\tan^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha}$

خاصية 4

إذا كان α و β قياسي زاويتين غير منعدمتين و متتامتين .

فإن $\sin\alpha = \cos\beta$ و $\cos\alpha = \sin\beta$ و $\tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta}$

تطبيق7

1– بسط التعبير $A = sin^2 60° + tan 15° + sin^2 30° - \dfrac{1}{tan 75°}$

2 – علما أن $\alpha + \beta = 90°$ بين أن $tan \beta + \dfrac{1}{tan \beta} - \dfrac{1}{sin \beta \times cos \beta} = 0$

الجواب

لدينا
$$A = sin^2 60° + tan 15° + sin^2 30° - \frac{1}{tan 75°}$$
$$= sin^2 60° + sin^2 30° + tan 15° - \frac{1}{tan 75°}$$
$$= sin^2 60° + cos^2 60° + tan \frac{1}{75°} - \frac{1}{tan 75°}$$
$$= 1$$

لدينا
$$R = tan \beta + \frac{1}{tan \beta} - \frac{1}{sin \beta \times cos \beta}$$
$$= \frac{tan \beta + 1}{tan \beta} - \frac{1}{sin^2 \beta}$$
$$= \frac{tan \beta + 1}{tan \beta} - \frac{tan \beta + 1}{tan \beta}$$
$$= 0$$

النسب المثلثية لزوايا خاصة .

	0°	30°	45°	60°	90°
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف

V. إستعمال المحسبة لحساب النسب المثلثية

لحساب النسب المثلثية لزاوية قياسها α بالدرجة يمكن الإستعانة بالآلة الحاسبة العلمية:

مثال : لحساب النسب المثلثية للزاوية $63°$ نتبع الخطوات التالية :

1 – نشغل المحسبة ، و نسجل على شاشتها وحدة القياس $\ll DEG \gg$ أو $\ll D \gg$ أي الدرجة

2 – نسجل على الشاشة $63°$.

3 – نضغط على الزر المناسب $\boxed{sin}$ أو $\boxed{cos}$ أو $\boxed{tan}$ حسب المطلوب.

4 – نحصل على $sin 63° = 0,891006524$ أو $cos 63° = 0,453990499$ أو $tan 63° = 1,962610505$.

ملاحظة : في بعض الآلات الحاسبة ننجز المرحلة الثالثة قبل الثانية .

. تحديد قياس زاوية أحد نسبها المثلثية معلوم

مثال : لتحدد قياس زاوية جيب تمامها يساوي $0,17364817766693$ ، نتبع الخطوات التالية :

– نشغل المحسبة ، و نسجل على شاشتها وحدة القياس $\ll DEG \gg$ أو $\ll D \gg$ أي الدرجة

– نسجل العدد $0,17364817766693$ و نضغط على الزر $\ll 2ndF \gg$ ثم نضغط على $\boxed{cos}$

– نحصل تقريبا على القيمة $80°$