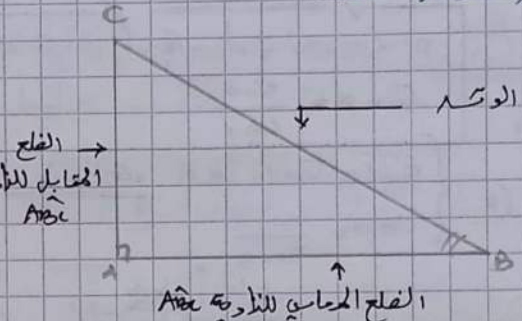
الدرس 7 : الحساب المثلثي

I - النسب المثلثية لزاوية حادة:

1) تمهيد:

ABC مثلث قائم الزاوية في A

نعتبر الزاوية $\hat{ABC}$



* ملاحظات:
* الوتر هو أكبر ضلع في المثلث القائم الزاوية
* الزاويتان $\hat{ABC}$ و $\hat{ACB}$ حادتان أي أن $0° < \hat{ABC} < 90°$ و $0° < \hat{ACB} < 90°$

2) تعريف:

في مثلث ABC قائم الزاوية في A، النسب المثلثية للزاوية $\hat{ABC}$ هي:

* النسبة $\frac{AB}{BC}$ تسمى جيب تمام الزاوية $\hat{ABC}$ ونرمز لها بالرمز $\cos \hat{ABC}$ أي: تقرأ cosinus

$$\cos \hat{ABC} = \frac{\text{الضلع المحاذي للزاوية } \hat{ABC}}{\text{الوتر}} = \frac{AB}{BC}$$

* النسبة $\frac{AC}{BC}$ تسمى جيب الزاوية $\hat{ABC}$ ونرمز لها بالرمز $\sin \hat{ABC}$ أي تقرأ sinus

$$\sin \hat{ABC} = \frac{\text{الضلع المقابل للزاوية } \hat{ABC}}{\text{الوتر}} = \frac{AC}{BC}$$

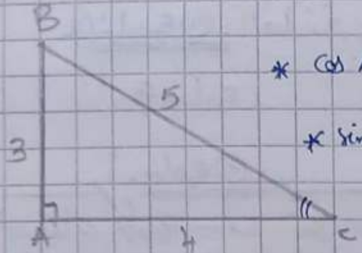
* النسبة $\frac{AC}{AB}$ تسمى ظل الزاوية $\hat{ABC}$ ونرمز لها بالرمز $\tan \hat{ABC}$ أي تقرأ tangente

$$\tan \hat{ABC} = \frac{\text{الضلع المقابل للزاوية } \hat{ABC}}{\text{الضلع المحاذي للزاوية } \hat{ABC}} = \frac{AC}{AB}$$

* مثال:

ABC مثلث قائم الزاوية في A بحيث: AB = 3cm و AC = 4cm و BC = 5cm

أحسب النسب المثلثية للزاوية $\hat{ACB}$



* $\cos \hat{ACB} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5} = 0,8$
* $\sin \hat{ACB} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} = 0,6$
* $\tan \hat{ACB} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} = 0,75$

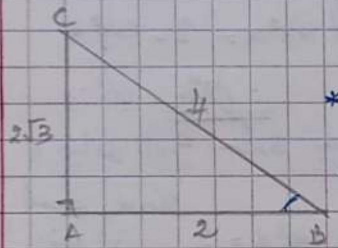
* تمرين تطبيقي: تمرين 21 ص 145

1) لدينا: $AB^2 = 2^2 = 4$; $AC^2 = (2\sqrt{3})^2 = 4\times 3 = 12$; $BC^2 = 4^2 = 16$

إذن $AB^2 + AC^2 = 4 + 12 = 16$ أي أن: $AB^2 + AC^2 = BC^2$

إذن حسب مبرهنة فيثاغورس العكسية فإن المثلث ABC قائم الزاوية في A

2) النسب المثلثية للزاوية $\hat{ABC}$:



* $\cos \hat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$
* $\sin \hat{ABC} = \frac{AC}{BC} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
* $\tan \hat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

* النسب المثلثية للزاوية $\hat{ACB}$

* $\cos \hat{ACB} = \frac{AC}{BC} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
* $\sin \hat{ACB} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
* $\tan \hat{ACB} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

3) استعمال الآلة الحاسبة في الحساب المثلثي:

1) باستعمال الآلة الحاسبة، أعط القيم المقربة للنسب المثلثية للزاوية $\alpha = 30°$

نجد أن: $\sin 30° = \frac{1}{2} = 0,5$, $\cos 30° \approx 0,86$

$\tan 30° \approx 0,57$

2) باستعمال الآلة الحاسبة أوجد قياس الزاوية α التي نسبها المثلثية هي على التوالي:

$\cos \alpha_1 = 0,5$ ، $\sin \alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\tan \alpha_3 = 1$

بالضغط على الزر $\boxed{\cos \sin \tan}$ + $\boxed{Shift}$ نجد أن:

$\alpha_1 = 60°$ ، $\alpha_2 = 45°$ ، $\alpha_3 = 45°$

II - علاقات بين النسب المثلثية لزاوية حادة

1) خاصية ①: العلاقة بين جيب وجيب تمام زاوية حادة

أ- خاصية ①:

α قياس زاوية حادة $0° < \alpha < 90°$

لدينا: $0 < \cos\alpha < 1$ و $0 < \sin\alpha < 1$

$$\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1}$$

* ملاحظات:

* α قياس زاوية حادة $0 < \cos\alpha < 1$ و $0 < \sin\alpha < 1$
* $\begin{cases} \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \\ \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \end{cases}$

ب- مثال:

α قياس زاوية حادة بحيث: $\cos\alpha = \frac{2}{3}$

لنحسب $\sin\alpha$

نعلم أن: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

إذن: $\sin^2\alpha + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1$

$\sin^2\alpha = 1 - \frac{4}{9}$

$\sin^2\alpha = \frac{5}{9}$

إذن، $\sin\alpha = \sqrt{\frac{5}{9}}$ لأن $\sin\alpha > 0$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

ج- تمرين تطبيقي: تمرين 21 ص 144

$A = 2\cos^2x + 3\sin^2x - 1$

$= 2\cos^2x + 2\sin^2x + \sin^2x - 1$

$= 2(\cos^2x + \sin^2x) + \sin^2x - 1$

$= 2 + \sin^2x - 1$

$\boxed{A = 1 + \sin^2x}$

$B = (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$

$= \cos^2x + 2\cos x\sin x + \sin^2x + \cos^2x - 2\cos x\sin x + \sin^2x$

$= \cos^2x + \sin^2x + \cancel{2\cos x\sin x} - \cancel{2\cos x\sin x} + \cos^2x + \sin^2x$

$= 1 + 1$

$\boxed{B = 2}$

$C = \sin^4x - \sin^2x + \cos^2x - \cos^4x$

$= \sin^2x(\sin^2x - 1) + \cos^2x(1 - \cos^2x)$

$= -\sin^2x \cdot \cos^2x + \cos^2x \cdot \sin^2x$

$\boxed{C = 0}$

$D = \cos^4x + 2\cos^2x\sin^2x + \sin^4x$

$= (\cos^2x)^2 + 2\cos^2x\sin^2x + (\sin^2x)^2$

$= (\cos^2x + \sin^2x)^2$

$= 1^2$

$\boxed{D = 1}$

2) خاصية ②: العلاقة بين جيب وجيب تمام وظل زاوية حادة

أ- خاصية ②:

α قياس زاوية حادة $0° < \alpha < 90°$

لدينا: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

* ملاحظات:

1) α قياس زاوية حادة $\tan\alpha > 0$

2) $\begin{cases} \sin\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha \\ \cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\tan\alpha} \end{cases}$

ب- أمثلة:

1) لنحسب α قياس زاوية حادة بحيث $\tan\alpha = 2\sqrt{2}$

لدينا: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ، أي $2\sqrt{2} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

إذن: $\sin\alpha = 2\sqrt{2}\cos\alpha$

وبما أن: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$(2\sqrt{2}\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$8\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$9\cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{9}$

لأن: $\cos\alpha > 0$ ، $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{9}}$

أي أن $\boxed{\cos\alpha = \frac{1}{3}}$

ولدينا: $\sin\alpha = 2\sqrt{2}\cos\alpha$

$\sin\alpha = 2\sqrt{2} \times \frac{1}{3}$

أي أن $\boxed{\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}}$

2) α قياس زاوية حادة بحيث $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

لنحسب $\tan\alpha$

لنحسب أولا $\cos\alpha$

لدينا: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$

$\cos\alpha > 0$ لأن $\cos\alpha = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

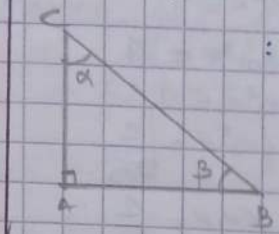
ولدينا: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{2}$

$\boxed{\tan\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}}$

3) نشاط ③ : النسب المثلثية لزاويتين متتامتين.

أ- خاصية ③ :

إذا كانت α و β قياسي زاويتين حادتين متتامتين أي: $\alpha+\beta=90°$ فإن:



$$\begin{cases} \cos\alpha = \sin\beta \\ \sin\alpha = \cos\alpha \\ \tan\alpha = \dfrac{1}{\tan\beta} \end{cases}$$

ب- أمثلة :

* $\sin 70° = \cos 20°$
* $\cos 30° = \sin 60°$
* $\sin 80° = \cos 10°$
* $\cos 45° = \sin 45°$
* $\tan 15° = \dfrac{1}{\tan 75°}$
* $\tan 11° = \dfrac{1}{\tan 79°}$

ج- تمرين تطبيقي : تمرين 16 ص 145

$X_1 = \cos 5° + 2\sin^2 22° - \sin 85° + 2\sin^2 68°$

$= \cancel{\cos 5°} - \cancel{\cos 5°} + 2\sin^2 22° + 2\cos^2 22°$

$= 2(\sin^2 22° + \cos^2 22°)$

$= 2\times 1$

$\boxed{X_1 = 1}$

$X_2 = \cos^2 14° + \cos^2 28° + \cos^2 76° + \cos^2 62°$

$= \cos^2 14 + \sin^2 14° + \cos^2 28° + \sin^2 28°$

$= 1 + 1$

$\boxed{X_2 = 2}$

$X_3 = 5\sin^2 34° + 3\cos^2 11° + 5\sin^2 56° + 3\cos^2 79°$

$= 5\sin^2 34° + 5\cos^2 34° + 3\cos^2 11° + 3\sin^2 11°$

$= 5(\sin^2 34° + \cos^2 34°) + 3(\cos^2 11° + \sin^2 11°)$

$= 5 + 3$

$\boxed{X_3 = 8}$

4) النسب المثلثية لزوايا خاصة

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف