سلسلة 1 للحساب المثلثي

تمرين 1 :

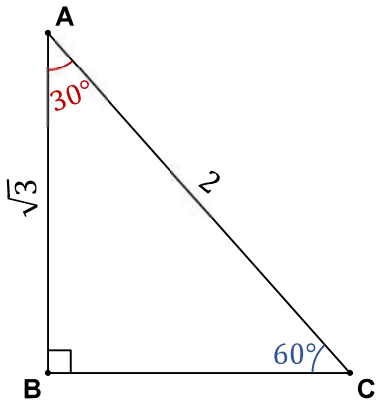
ABC مثلث قائم الزاوية في B .

أتمم ما يلي :

$\sin 30° = \frac{\dots}{AC} = \frac{\dots}{2}$

$\cos 30° = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

$\tan 30° = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$ [1]



$\sin 60° = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

$\cos 60° = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

$\tan 60° = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

تمرين 2 :

أتمم الفراغ بما يناسب بحيث α زاوية حادة :

$\sin 60° = \cos \dots$

$\cos(90° - \alpha) = \sin \dots$

$\tan 80° = \frac{1}{\dots}$

$\tan 60° \times \tan \dots = 1$

$\cos^2 60° + \sin^2 \dots = 1$

$\dots < \sin \alpha < \cdots$

$\dots < \cos \alpha < \cdots$

تمرين 3 :

أجب بصحيح أو خطأ بحيث α زاوية حادة :

$\cos 15° = \sin 80°$ ☐

$\sin 40° = \cos 50°$ ☐

$\tan 20° = \tan 70°$ ☐

$tan\ 10° = \frac{1}{tan\ 80°}$ ☐

$tan\ 30° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°}$ ☐

$\tan 30° = \frac{sin\ 30°}{cos\ 30°}$ ☐

$\cos 50° = \cos 30° + \cos 20°$ ☐

$\sin 30° + \cos 30° = 1$ ☐

$\sin^2 30° + \cos^2 60° = 1$ ☐

$\sin^2 30° + \cos^2 30° = 1$ ☐

$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ ☐

$\sin \alpha = 2$ توجد زاوية α بحيث ☐

$\tan \alpha = 2$ توجد زاوية α بحيث ☐

مجموع زاويتين متتامتين هو $90°$ ☐

الوتر هو أصغر ضلع في المثلث ☐

---

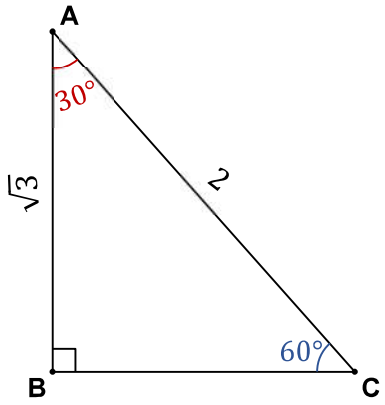
[1] من استعمالات *tangente* هو معرفة الإرتفاع باستعمال ظل الأشكال

حل سلسلة 1 للحساب المثلثي

تمرين 1 :

ABC مثلث قائم الزاوية في B .

أتمم ما يلي :



$\sin 30° = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$

$\cos 30° = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$^{1}\tan 30° = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sin 60° = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60° = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$

$\tan 60° = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{1}$

تمرين 2 :

أتمم الفراغ بما يناسب بحيث α زاوية حادة :

$\sin 60° = \cos 30°$

$\cos(90° - \alpha) = \sin \alpha$

$\tan 80° = \frac{1}{\tan 10°}$

$\tan 60° \times \tan 30° = 1$

$\cos^2 60° + \sin^2 60° = 1$

$0 < \sin \alpha < 1$

$0 < \cos \alpha < 1$

تمرين 3 :

أجب بصحيح أو خطأ بحيث α زاوية حادة :

$\cos 15° = \sin 80°$	خطأ
$\sin 40° = \cos 50°$	صحيح
$\tan 20° = \tan 70°$	خطأ
$tan\ 10° = \frac{1}{tan\ 80°}$	صحيح
$tan\ 30° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°}$	خطأ
$\tan 30° = \frac{sin\ 30°}{cos\ 30°}$	صحيح
$\cos 50° = \cos 30° + \cos 20°$	خطأ

$\sin 30° + \cos 30° = 1$	خطأ
$\sin^2 30° + \cos^2 60° = 1$	خطأ
$\sin^2 30° + \cos^2 30° = 1$	صحيح
$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$	صحيح
$\sin \alpha = 2$ توجد زاوية α بحيث	خطأ
$\tan \alpha = 2$ توجد زاوية α بحيث	صحيح
مجموع زاويتين متتامتين هو $90°$	صحيح
الوتر هو أصغر ضلع في المثلث	خطأ

---

[1] من استعمالات $tangente$ هو معرفة الإرتفاع باستعمال ظل الأشكال

سلسلة 2 للحساب المثلثي

تمرين 1 :

IJK مثلث بحيث : $IJ = 7cm$ و $IK = 4\sqrt{2}cm$ و $JK = 9cm$

1) بين أن المثلث IJK قائم الزاوية ؟

2) أحسب $\sin I\hat{K}J$ و $\cos I\hat{K}J$ و $\tan I\hat{K}J$ مع إعطاء قيم مقربة إلى 0,01 ؟

3) α قياس زاوية حادة بحيث $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

أحسب $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ ؟

تمرين 2 :

أحسب ما يلي :

$A = \cos^2 70° + \cos 60° + \cos^2 20° - \sin 30°$

$B = \sin 70° \times \cos 20° + \cos 70° \times \sin 20°$

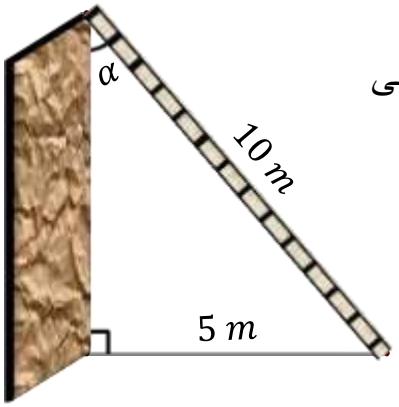
$C = 2\cos^2 80° - \cos^2 30° + 2\cos^2 10° - \cos^2 60°$

$D = \sin^2 5° - 3\cos^2 65° + \sin^2 85° - 3\cos^2 25°$

$E = \tan^2 60° \times \sin^2 30° + \cos^2 60°$

$F = \tan 70° \times \tan 50° \times \tan 20° \times \tan 40°$

تمرين 3 :



سلم طوله 10 متر يستند بطرفه العلوي على حائط رأسي وبطرفه السفلي على أرض أفقية بحيث طرفه السفلي يبعد عن الحائط 5 أمتار.

1) أوجد قياس الزاوية α التي يصنعها السلم مع الحائط ؟

2) أحسب طول الحائط h ؟

تمرين 4 :

ABC مثلث قائم الزاوية في A بحيث : $BC = 5\sqrt{2}$ و $A\hat{B}C = 45°$

1) أحسب AB و AC

2) حدد قياس الزاوية $\hat{C}$ ثم أحسب النسب المثلثية لهذه الزاوية .

3) α و β زاويتان متتامتان .

بين أن : $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\alpha - \cos^2\beta$

حل سلسلة 2 للحساب المثلثي

تمرين 1 :

IJK مثلث بحيث :

$IJ = 7cm$ و $IK = 4\sqrt{2}cm$ و $JK = 9cm$

1) بين أن المثلث IJK قائم الزاوية ؟

لدينا $IJ^2 = 7^2 = 49$

$IK^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 32$

$JK^2 = 9^2 = 81$

إذن الوتر هو JK لأنه أكبر ضلع في المثلث IJK

وبما أن $JK^2 = IJ^2 + IK^2 = 81$

إذن حسب مبرهنة فيتاغورس العكسية فإن :

المثلث IJK قائم الزاوية في I

2)

$$\sin I\hat{K}J = \frac{IJ}{JK} = \frac{7}{9} = 0{,}77$$

$$\cos I\hat{K}J = \frac{IK}{JK} = \frac{4\sqrt{2}}{9} = 0{,}63$$

$$\tan I\hat{K}J = \frac{IJ}{IK} = \frac{7}{4\sqrt{2}} = 1{,}23$$

3) نعلم أن $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\sin^2\alpha + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2\alpha + \frac{4}{5} = 1$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{4}{5}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{5-4}{5}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{5}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\mathbf{\tan\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{2}$$

تمرين 2 :

أحسب ما يلي :

$$A = \cos^2 70° + \cos 60° + \cos^2 20° - \sin 30°$$

$$= \cos^2 70° + \cos^2 20° + \cos 60° - \sin 30°$$

$$= \sin^2 20° + \cos^2 20° + \sin 30° - \sin 30°$$

$$= 1$$

$$B = \sin 70° \times \cos 20° + \cos 70° \times \sin 20°$$

$$= \cos 20° \times \cos 20° + \sin 20° \times \sin 20°$$

$$= \cos^2 20° + \sin^2 20°$$

$$= 1$$

$$C = 2\cos^2 80° - \cos^2 30° + 2\cos^2 10° - \cos^2 60°$$

$$= 2\cos^2 80° + 2\cos^2 10° - \cos^2 30° - \cos^2 60°$$

$$= 2(\cos^2 80° + \cos^2 10°) - (\cos^2 30° + \cos^2 60°)$$

$$= 2(\sin^2 10° + \cos^2 10°) - (\sin^2 60° + \cos^2 60°)$$

$$= 2 \times 1 - 1$$

$$= 2 - 1$$

$$= 1$$

$$D = \sin^2 5° - 3\cos^2 65° + \sin^2 85° - 3\cos^2 25°$$

$$= \sin^2 5° + \sin^2 85° - 3\cos^2 65° - 3\cos^2 25°$$

$$= \cos^2 85° + \sin^2 85° - 3(\cos^2 65° + \cos^2 25°)$$

$$= 1 - 3(\sin^2 25° + \cos^2 25°)$$

$$= 1 - 3 \times 1$$

$$= 1 - 3$$

$$= -2$$

$$E = \tan^2 60° \times \sin^2 30° + \cos^2 60°$$

$$= \frac{\sin^2 60°}{\cos^2 60°} \times \sin^2 30° + \cos^2 60°$$

$$= \frac{\sin^2 60°}{\sin^2 30°} \times \sin^2 30° + \cos^2 60°$$

$$= \sin^2 60° + \cos^2 60°$$

$$= 1$$

$$F = \tan 70° \times \tan 50° \times \tan 20° \times \tan 40°$$

$$= tan\ 70° \times \tan 20° \times \tan 50° \times \tan 40°$$

$$= tan\ 70° \times \frac{1}{\tan 70°} \times \tan 50° \times \frac{1}{\tan 50°}$$

$$= 1 \times 1$$

$$= 1$$

تمرين 3 :

1) لدينا $\sin\alpha = \frac{5}{10} = \frac{5\times 1}{5\times 2} = \frac{1}{2}$

من خلال جدول الزوايا الإعتيادية لدينا :

$$\sin 30° = \frac{1}{2}$$

إذن $\alpha = 30°$

2) لدينا $\cos 30° = \frac{h}{10}$

من خلال جدول الزوايا الإعتيادية لدينا :

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{h}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

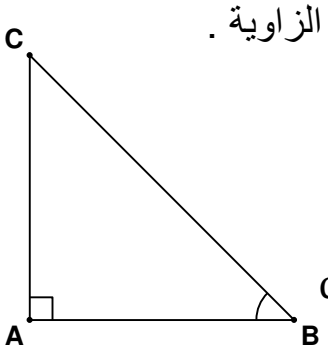
$$h = \frac{10\times\sqrt{3}}{2}$$

إذن $\alpha = 5\sqrt{3}$

ملاحظة : يمكن استخدام مبرهنة فيتاغورس العكسية لحساب h لأن الشكل قائم الزاوية .

تمرين 4 :

1) **نحسب AB :**



لدينا $\cos A\hat{B}C = \frac{AB}{BC}$

من خلال جدول الزوايا الإعتيادية لدينا :

$$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{AB}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$AB = \frac{5\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}^2}{2} = \frac{5\times 2}{2}$$

$$AB = 5$$

نحسب AC :

لدينا $\sin A\hat{B}C = \frac{AC}{BC}$

ولدينا $\sin A\hat{B}C = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

إذن $\frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{AC}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$AC = \frac{5\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2}$$

$$AC = 5$$

2) **طريقة 1 :**

لدينا مجموع زوايا المثلث ABC :

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + 180°$$

$$90° + 45° + \hat{C} = 180°$$

$$135° + \hat{C} = 180°$$

$$\hat{C} = 180° - 135°$$

$$\hat{C} = 45°$$

طريقة 2 :

لدينا $\sin\hat{C} = \frac{AB}{BC}$

$$\sin \hat{C} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

من خلال جدول الزوايا الإعتيادية لدينا :

$$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\hat{C} = 45° \quad \text{إذن}$$

طريقة 3 :

لدينا المثلث ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين رأسه A إذن : $A\hat{C}B = A\hat{B}C = 45°$

$$\hat{C} = 45° \quad \text{إذن}$$

نحسب النسب المثلثية لهذه الزاوية $\hat{C}$:

$$\sin \hat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos\ \hat{C} = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \hat{C} = \frac{\sin \hat{C}}{cos\ \hat{C}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معروف

3) **بين أن :**

$$\mathbf{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta} = 1 - \cos^2 \beta - (1 - \cos^2 \alpha)$$

$$= 1 - \cos^2 \beta - 1 + \cos^2 \alpha$$

$$= 1 - 1 + \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta$$

$$= \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta$$

سلسلة 3 للحساب المثلثي

تمرين 1 :

بسط مايلي :

$A = \sin x - \cos x \times \tan x$

$B = 2\cos^2 x + \sin^2 x - 1$

$C = \cos^2 x\,(1 + \tan^2 x)$

$D = (\sin x - \cos x)^2 + 2\sin x \times \cos x$

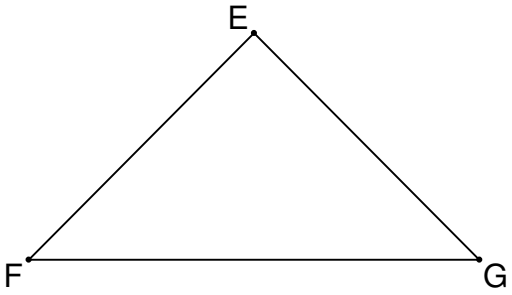
$E = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$

$F = \dfrac{\cos^2 x + 2\sin^2 x - 1}{\sin^2 x}$

$G = (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) + 2\cos^2 x$

تمرين 2 :

EFG مثلث متساوي الساقين بحيث : $EF = EG = 5\ cm$ و $FG = 8\ cm$



1) أوجد النسب المثلثية للزاوية $E\hat{F}G$

2) α زاوية حادة . علماً أن : $\tan\alpha = 3\sin\alpha$

أحسب $\cos\alpha$ و $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$

بين أن : $\dfrac{\sin\alpha \times \cos^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha} = \sin\alpha$

تمرين 3 :

1) حدد قيمة x إذا علمت أن : $2\sin x - 1 = 0$

2) α قياس زاوية حادة بحيث : $\cos\alpha + \sin(90° - \alpha) = \sqrt{3}$

أحسب $\cos\alpha$ ثم استنتج قيمة α

3) α و β قياسا زاويتين متتامتين .

إذا علمت أن : $2\tan\alpha + \dfrac{1}{\tan\beta} = \sqrt{3}$. حدد قيمة α

4) ليكن x قياس زاوية حادة غير منعدمة .

أوجد قيمة x علماً أن : $\tan x - 2\sin x = 0$

حل سلسلة 3 للحساب المثلثي

تمرين 1 :

بسط مايلي :

$$\boldsymbol{A = \sin x - \cos x \times \tan x} = \sin x - \cos x \times \tan x$$

$$= \sin x - \cos x \times \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x - \sin x$$

$$= 0$$

$$\boldsymbol{B = 2\cos^2 x + \sin^2 x - 1} = \cos^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x - 1 = \cos^2 x + 1 - 1$$

$$= \cos^2 x$$

$$\boldsymbol{C = \cos^2 x\,(1 + \tan^2 x)} = \cos^2 x \left(1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)$$

$$= \cos^2 x \times 1 + \cos^2 x \times \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \cos^2 x + \sin^2 x$$

$$= 1$$

$$\boldsymbol{D = (\sin x - \cos x)^2 + 2\sin x \times \cos x}$$

$$= (sin^2 x - 2 \times sin\, x \times cos\, x + cos^2 x) + 2\sin x \times \cos x$$

$$= \sin^2 x + cos^2 x - 2\, sin\, x \times cos\, x\ + 2\sin x \times \cos x$$

$$= 1$$

$$\boldsymbol{E = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2}$$

$$= (\sin^2 x + 2\sin x \times \cos x + \cos^2 x) + (\sin^2 x - 2\sin x \times \cos x + \cos^2 x)$$

$$= (1 + 2\sin x \times \cos x) + (1 - 2\sin x \times \cos x)$$

$$= 1 + 1 + 2\sin x \times \cos x - 2\sin x \times \cos x$$

$$= 2$$

$$\boldsymbol{F = \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x - 1}{\sin^2 x}} = \frac{\cos^2 x - 1 + 2\sin^2 x}{\sin^2 x}$$

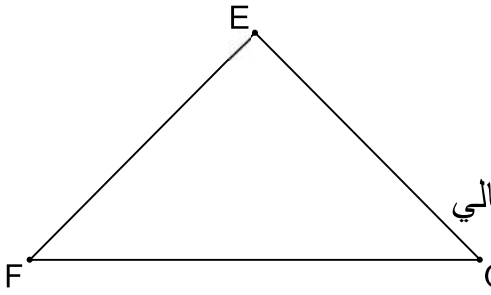
$$= \frac{\sin^2 x + 2\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{3\sin^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= 3$$

$$\boldsymbol{G = (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) + 2\cos^2 x}$$
$$= \sin^2 x - \cos^2 x + 2\cos^2 x$$
$$= \sin^2 x + \cos^2 x$$
$$= 1$$

تمرين 2 :

EFG مثلث متساوي الساقين بحيث : $EF = EG = 5\ cm$ و $FG = 8\ cm$



1) أوجد النسب المثلثية للزاوية $\widehat{EFG}$

لدينا الوتر هو FG لأنه أكبر ضلع في المثلث EFG وباستعمال مبرهنة فيتاغورس العكسية نجد أن المثلث غير قائم الزاوية وبالتالي لايمكن حساب النسب المثلثية إلا إذا كان المثلث قائم الزاوية .

2) α زاوية حادة . علماً أن : $\tan\alpha = 3\sin\alpha$

➢ **نحسب $\cos\alpha$:**

لدينا $\tan\alpha = 3\sin\alpha$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 3\sin\alpha$$
$$\frac{\sin\alpha}{3\sin\alpha} = \cos\alpha$$

إذن $\cos\alpha = \frac{1}{3}$

➢ **نحسب $\sin\alpha$:**

نعلم أن $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\sin^2\alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$
$$\sin^2\alpha + \frac{1}{9} = 1$$
$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{9-1}{9}$$
$$\sin^2\alpha = \frac{8}{9}$$
$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{4}\times\sqrt{2}}{\sqrt{3}^2}$$

إذن $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

نحسب $\tan\alpha$:

لدينا $\tan\alpha = 3\sin\alpha$

$$\tan\alpha = 3\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

إذن $\tan\alpha = 2\sqrt{2}$

بين أن : $\frac{\sin\alpha\times\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \sin\alpha$:

$$\frac{\sin\alpha\times\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{\sin\alpha\times(1-\sin^2\alpha)}{1-\sin^2\alpha} = \sin\alpha$$

تمرين 3 :

1) لدينا $2\sin x - 1 = 0$

$$2\sin x = 1$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

من خلال جدول الزوايا الإعتيادية لدينا :

$$\sin 30° = \frac{1}{2}$$

إذن $x = 30°$

2) لدينا $\cos\alpha + \sin(90° - \alpha) = \sqrt{3}$

$$\cos\alpha + \cos\alpha = \sqrt{3}$$

$$2\cos\alpha = \sqrt{3}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

من خلال جدول الزوايا الإعتيادية لدينا :

$$cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

إذن $\alpha = 30°$

3) لدينا $2\tan\alpha + \frac{1}{tan\beta} = \sqrt{3}$

$$2\tan\alpha + \tan\alpha = \sqrt{3}$$

$$3\tan\alpha = \sqrt{3}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

من خلال جدول الزوايا الإعتيادية لدينا :

$$tan\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

إذن $\alpha = 30°$

4) لدينا $\tan x - 2\sin x = 0$

$$\frac{\sin x}{\cos x} - 2\sin x = 0$$

$$\frac{\sin x - 2\sin x\cos x}{\cos x} = 0$$

$$\sin x - 2\sin x\cos x = 0 \times \cos x$$

$$\sin x - 2\sin x\cos x = 0$$

$$\sin x\,(1 - 2\cos x) = 0$$

$\sin x = 0$ أو $1 - 2\cos x = 0$

$\cos x = \frac{1}{2}$ أو $\sin x = 0$

من خلال جدول الزوايا الإعتيادية لدينا :

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معروف

$\sin 0° = 0$ و $cos\ 60° = \frac{1}{2}$

إذن $x = 60°$ أو $x = 0°$