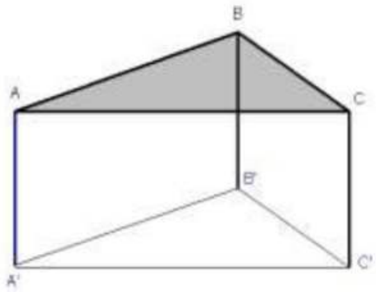
المثلثات المتقايسة و المثلثات المتشابهة

المثلثـــــــات المتقايسة

نشاط تمهيدي

أعجب زيد بطاولة على شكل مثلث (أنظر الشكل) فطلب من نجار أن يصنع له مثلها .



1 – حدد في الشكل الأوجه القابلة للتطابق .

2 – حدد في الشكل الأضلاع المتقايسة .

3 – قارن $B\hat{A}C$ و $B'\hat{A}'C'$ ثم $A\hat{B}C$ و $A'\hat{B}'C'$

ثم $B\hat{C}A$ و $B'\hat{C}'A'$.

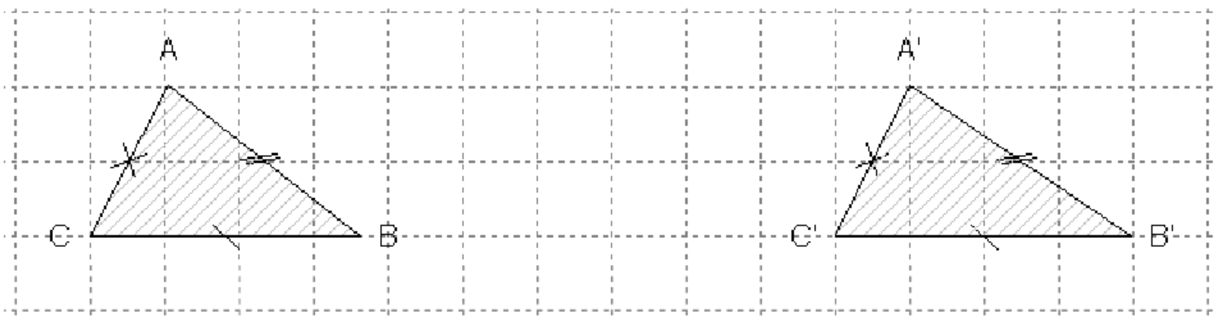
4 – إقترح أهم الوسائل التي سيحتاجها النجار لصناعة طاولة مشابهة

5– هل يمكنك مساعدة النجار في طريقة العمل .

I. تعريف المثلثات المتقايسة

تعريف 1

نقول إن المثلثان ABC و $A'B'C'$ متقايسان إذا كان قابلان للتطابق.



مصطلحات

. الضلعان [AB] و [A'B'] قابلان للتطابق . نقول أنهما متناظران .

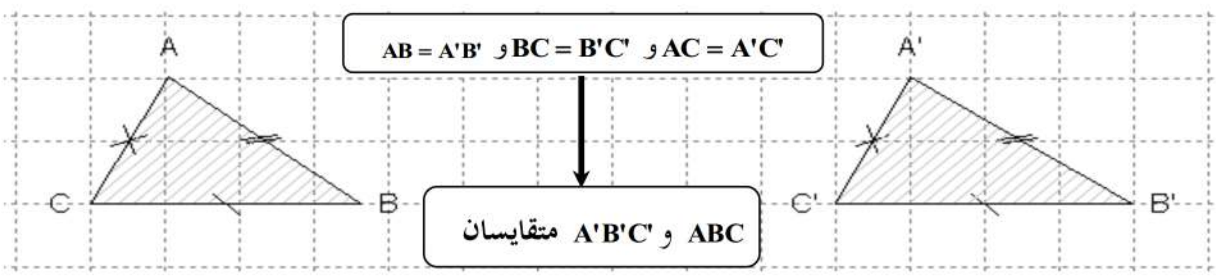
. الزاويتان $[A\hat{B}C]$ و $[A'\hat{B}'C']$ قابلتان للتطابق نقول أنهما متناظرتان .

نتيجة: في مثلثين متقايسين الزوايا المتناظرة متقايسة و الأضلاع المتناظرة متقايسة

II. حـــــــــالات التقايس

خاصية1

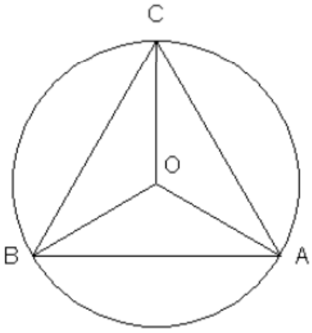
إذا قايست أضلاع مثلث على التوالي أضلاع مثلث آخر فإن هذين المثلثين متقايسان



تطبيق 1

ABC مثلث متساوي الأضلاع و O مركز الدائرة المحيطة به . (أنظر الشكل أسفله)

بين أن المثلثات OAB و OAC و OBC متقايسة



الحل

. لنبين أن المثلثات OAB و OAC و OBC متقايسة.

لدينا A و B و C نقط من نفس الدائرة التي مركزها O

يعني $OA = OB = OC$

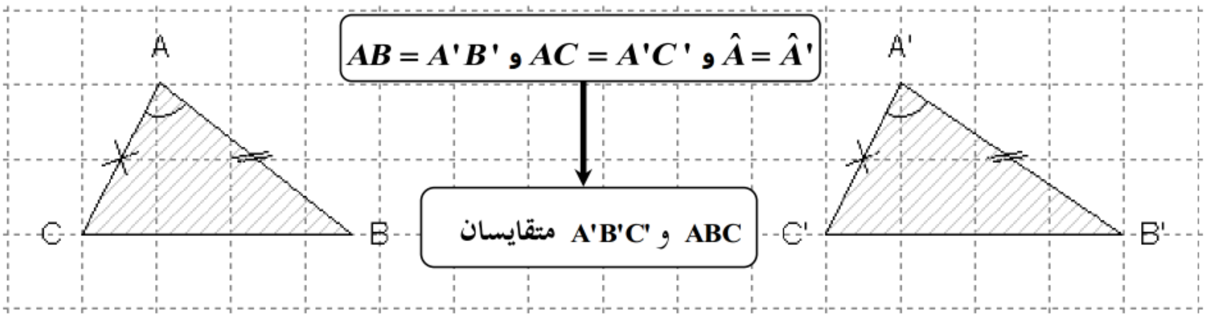
وبما أن المثلث ABC متساوي الأضلاع

فإن $AB = AC = BC$.

ومنه المثلثات OAB و OAC و OBC متقايسة.

خاصية2

إذا قايس ضلعان في مثلث و الزاوية المحصورة بينهما على التوالي ضلعان و الزاوية المحصورة بينهما في مثلث آخر فإن هذين المثلثين متقايسان .



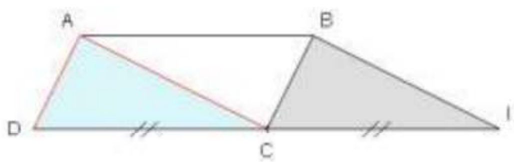
تطبيق 2

$ABCD$ متوازي الأضلاع ، I مماثلة النقطة D بالنسبة لـ C .

بين أن المثلثين ADC و BCI متقايسان.

الحل

1 . الشكل



2. لنبين أن المثلثين ADC و BCI متقايسان.

لدينا $S_C(D) = I$

إذن $IC = CD$ (**1**)

لدينا الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع

يعني كل ضلعين متقابلين فيه متقايسين

ومنه $AD = CB$ (**2**)

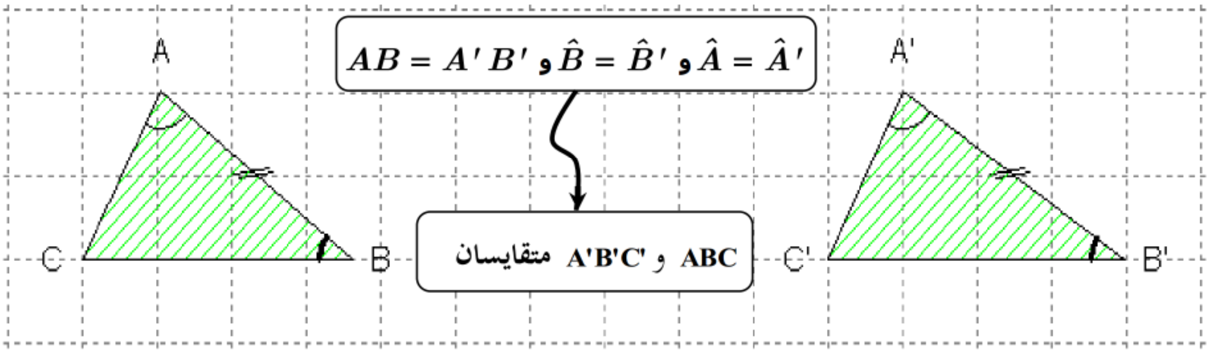
من جهة أخرى الزاويتين $[A\hat{D}C]$ و $[B\hat{C}I]$ زاويتان متناظرتان محددتان بالمتوازيين (AD) و (BC) و القاطع (DI)

إذن $A\hat{D}C = B\hat{C}I$ (**3**)

من **1** و **2** و **3** نستنتج أن المثلثين ADC و BCI متقايسان.

خاصية3

إذا قايست زاويتان في مثلث و الضلع المحادي لهما على التوالي زاويتان في مثلث آخر و الضلع المحادي لهما فإن هذين المثلثين متقايسان .



تطبيق 3

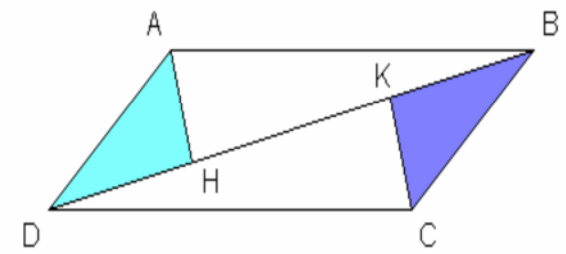
$ABCD$ متوازي الأضلاع . $[AH]$ ارتفاعا للمثلث ABD و $[CK]$ ارتفاعا للمثلث CDB .

1 – بين أن المثلثين BCK و ADH متقايسان .

2 – إستنتج أن $CK = AH$ و $BK = DH$.

الحل

1 . الشكل



2 – لنبين أن المثلثين BCK و ADH متقايسان

لدينا الزاويتان $[K\hat{B}C]$ و $[A\hat{D}H]$ متبادلتان داخليا محددتان بالمتوازيين (AD) و (BC) و القاطع (BD)

إذن $A\hat{D}K = K\hat{B}C$ (a)

وبما أن $[AH]$ إرتفاعا للمثلث ABD و $[CK]$ إرتفاعا للمثلث CDB

فإن $A\hat{H}D = B\hat{K}D = 90°$

ومنه $D\hat{A}H = K\hat{C}B$ (b) (لأن مجموع

$180°$ ...

و بما أن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع

فإن $AD = BC$ (c)

و بالتالي من (a) و (b) و (c) نستنتج أن

المثلثين BCK و ADH متقايسان

3 – لنستنتج أن $CK = AH$ و $BK = DH$

لدينا حسب السؤال **2** ، المثلثان BCK و ADH متقايسين .

إذن الأضلاع المتناظرة في المثلثين BCK و ADH متقايسة.

ومنه $CK = AH$ و $BK = DH$

المثلثـــــــات المتشابهة

نشاط تمهيدي

ABC و OMN مثلثان بحيث : $A\hat{B}C = O\hat{M}N$ و $B\hat{A}C = M\hat{O}N$ و $B\hat{C}A = M\hat{N}O$ (أنظر الشكل)

E نقطة من (AC) بحيث $AE = ON$ ، الموازي لـ (BC) المار من E يقطع (AB) في F

1 . أرسم شكلا مناسبا .

2 . بين أن $A\hat{E}F = O\hat{N}M$.

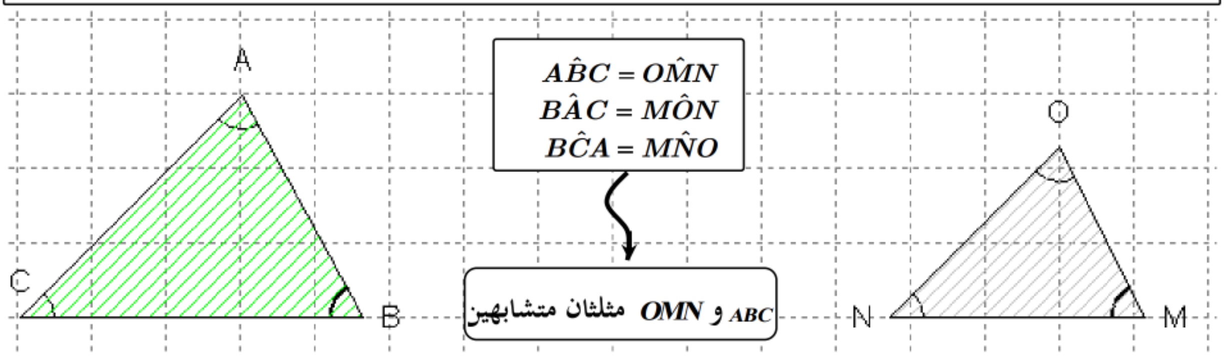
3 . بين أن المثلثين AFE و OMN متقايسان.

4 . بين أن $\frac{AC}{ON} = \frac{AB}{OM} = \frac{BC}{MN}$.

I. المثلثان المتشابهان

تعريف 1

نقول إن مثلثين متشابهان إذا قايست زوايا أحدهما على التوالي زوايا الآخر



مفــردات

- الزاويتان $[A\hat{B}C]$ و $[O\hat{M}N]$ تسميان زاويتان متناظرتان .
- الضلعان $[AB]$ و $[OM]$ يسميان ضلعان متناظران.

ملاحظة : المثلثان المتقايسان هما مثلثان متشابهان و العكس غير صحيح .

إستنتــاج

إذا كان ABC و $A'B'C'$ مثلثين متشابهين فإن الأضلاع المتناظرة متناسبة .

أي $\frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = K$.

العـدد K يسمى نسبة تشابه المثلثين ABC و $A'B'C'$.

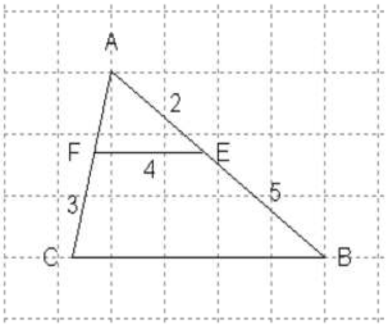
تطبيق 1

نعتبر الشكل جانبه ، حيث $AE = 2$ و $EB = 5$ و $AF = x$

و $FC = 3$ و $CB = y$ و $EF = 4$ و $(BC) // (EF)$

علما أن المثلثين ABC و AEF متشابهان .

أحسب x و y .



الحل

. لنحسب x و y .

لدينا المثلثان ABC و AEF متشابهان .

إذن $\dfrac{AC}{AF} = \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BC}{EF}$

ت . ع $\dfrac{x+3}{x} = \dfrac{7}{2} = \dfrac{y}{4}$

من العلاقة $\dfrac{x+3}{x} = \dfrac{7}{2}$

نستنتج أن $2(x+3) = 7x$

يكافئ $2x + 6 = 7x$

يكافئ $2x + 6 + (-6) + (-7x) = 7x + (-6) + (-7x)$

يكافئ $2x - 7x = -6$

يكافئ $(2-7)x = -6$

يكافئ $-5x = -6$

يكافئ $\dfrac{1}{-5} \times (-5x) = \dfrac{1}{-5} \times (-6)$

يكافئ $x = \dfrac{-6}{-5} = \dfrac{6}{5}$

من العلاقة $\dfrac{y}{4} = \dfrac{7}{2}$

نستنتج أن $2y = 7 \times 4$

يكافئ $2y = 28$

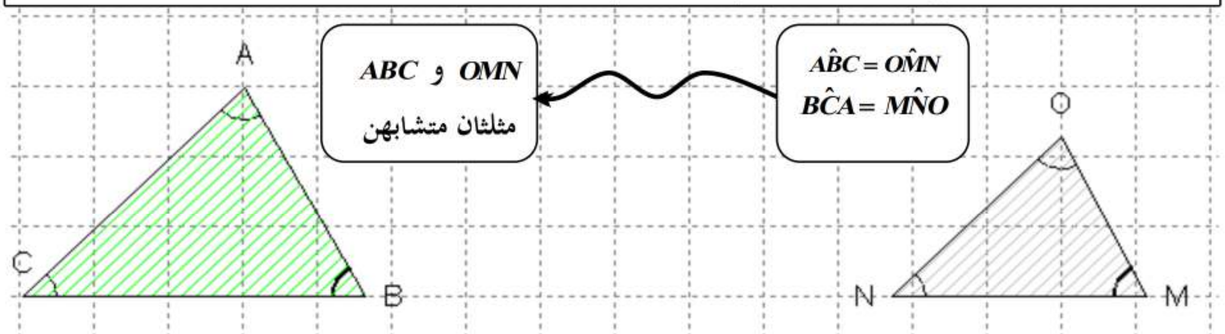
يكافئ $\dfrac{1}{2} \times 2y = \dfrac{1}{2} \times 28$

يكافئ $y = \dfrac{28}{2} = 14$

II. حـــالات الـتـشـــابه

خاصية 1

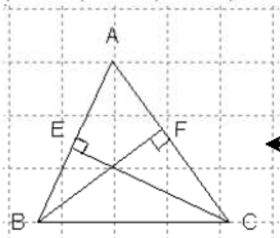
إذا قايست زاويتان في مثلث على التوالي زاويتان في مثلث آخر فإن هذين المثلثين متشابهان



تطبيق 2

نعتبر الشكل جانبه حيث $[BF]$ و $[CF]$ إرتفاعين للمثلث

ABC بين أن المثلثين AFB و AEC متشابهان .



الحل

لنبين أن المثلثين AFC و AEB متشابهان

لدينا $[BF]$ إرتفاع للمثلث ABC

إذن $A\hat{F}C = 90°$

و $[CE]$ إرتفاع للمثلث ABC

إذن $A\hat{E}B = 90°$

ومنه $A\hat{E}B = A\hat{F}C$

من جهة أخرى الزاوية $\left[B\hat{A}C\right]$ زاوية مشتركة بين المثلثين AFC و AEB

و بالتالي المثلثان AFC و AEB

خاصية 2

إذا قايست زاوية في مثلث زاوية في مثلث آخر وكانت أطوال الأضلاع المحاذية لهاتين الزاويتين متناسبة فيما بينها فإن هذين المثلثين متشابهان.

يتعبير آخر

إذا كان $A\hat{B}C = F\hat{E}G$ و $\dfrac{BA}{EF} = \dfrac{BC}{EG}$ فإن المثلثين ABC و EFG متشابهان .

تطبيق 3

$\left[x\hat{A}y\right]$ زاوية و M نقطة من منصفها الداخلي بحيث $(M \neq A)$

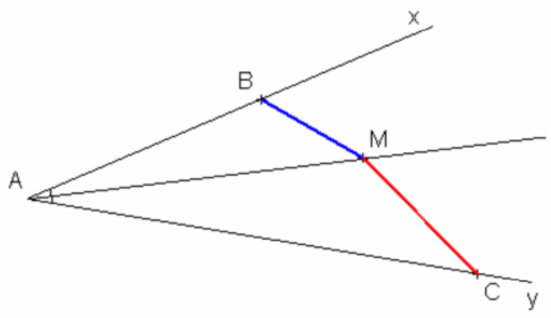
لتكن B نقطة من $[Ax)$ و C نقطة من $[Ay)$ بحيث $AB = \dfrac{3}{4}AM$ و $AC = \dfrac{4}{3}AM$

1 . أرسم شكلا مناسبا

2 . بين أن المثلثين ABM و ACM متشابهان .

الحل

الشكل



2 . لنبين أن المثلثين ABM و ACM متشابهان .

لدينا $[AM)$ منصف الزاوية $\left[x\hat{A}y\right]$

إذن $x\hat{A}M = y\hat{A}M$

وبما أن $B \in [Ax)$ و $C \in [Ay)$

فإن $x\hat{A}M = B\hat{A}M$ و $C\hat{A}M = y\hat{A}M$

و منه $C\hat{A}M = B\hat{A}M$ (1)

من جهة أخرى :

لدينا $AB = \dfrac{3}{4}AM$ يعني $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{3}{4}$

و $AC = \dfrac{4}{3}AM$ يعني $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{3}{4}$

و منه $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AM}{AC}$ (2)

و بالتالي حسب الحالة الثانية للتشابه نستنتج من **1** و **2** أن المثلثان ABM و ACM متشابهين

خاصية 3

إذا كانت أطوال أضلاع مثلث متناسبة مع أطوال أضلاع مثلث آخر فإن هذين المثلثين متشابهان.

يتعبير آخر

إذا كان $\frac{AC}{FG} = \frac{BC}{EG} = \frac{BA}{EF}$ فإن المثلثين ABC و EFG متشابهان .

تطبيق 3

ABC مثلث بحيث $AB = 6$ و $AC = 9$ و $BC = 7$. M منتصف [AB] و N نقطة من $[AC]$ بحيث $AN = 2$

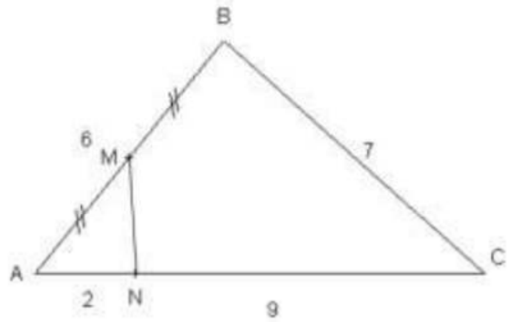
1 . بين أن المثلثين AMN و ABC متشابهان.

2 . أحسب المسافة MN .

3− لتكن $K \in [NK]$ ، نضع $NK = x$ حدد قيمة x لكي يكون المثلثان AMN و AMK

الحل

الشكل



1 . لنبين أن المثلثين AMN و ABC متشابهان.

لدينا $[\hat{A}]$ زاوية مشتركة بين المثلثين

AMN و ABC

و لدينا $\frac{AB}{AN} = \frac{6}{2} = 3$ و $\frac{AC}{AM} = \frac{9}{3} = 3$

إذن $\frac{AC}{AM} = \frac{AB}{AN}$

ومنه المثلثان AMN و ABC متشابهان.

2 . لنحسب المسافة MN .

لدينا حسب السؤال الأول المثلثان

AMN و ABC متشابهان.

إذن الأضلاع المتناظرة متناسبة

أي $\frac{BC}{MN} = \frac{AB}{AN} = \frac{AC}{AM}$

ت.ع $\frac{7}{MN} = 3$ يكافئ $MN = \frac{7}{3}$

3 − لنحدد قيمة x

إذا كان المثلثان AMN و AMK متشابهان

فإن الأضلاع المتناظرة متناسبة

إذن $\frac{AN}{AM} = \frac{AM}{AK} = \frac{MN}{MK}$

يكافئ $\frac{2}{3} = \frac{3}{x+2} = \frac{MN}{MK}$

يكافئ $2(x+2) = 3 \times 3$

يكافئ $2x + 4 = 9$

يكافئ $2x + 4 - 4 = 9 - 4$

يكافئ $2x = 5$

يكافئ $\frac{1}{2} \times 2x = \frac{1}{2} \times 5$

يكافئ $x = \frac{5}{2}$