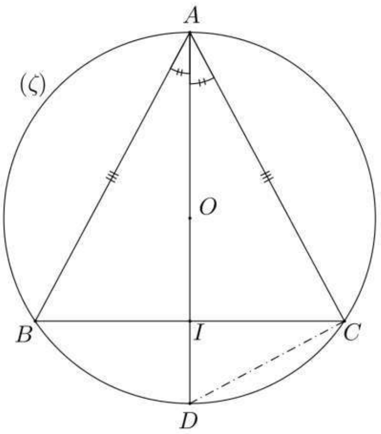
حُلولُ التَّمَارِين

التقـــــايس و التشـــــابه

المستـــــوى : الثالثة ثانـــوي إعـــدادي

من إعداد الأستاذ : المهـــــدي عنيـــس

❀ تمرين ① :



1) – لنثبت أن المثلثين ABI و ACI متقايسان :

لدينا : ABC مثلث متساوي الساقين في A .

إذن : $AB = AC$.

و بما أن $(AI]$ منصف الزاوية $B\hat{A}C$ ، فإن : $B\hat{A}I = C\hat{A}I$.

للمثلثين ABI و ACI : و $\left\{\begin{array}{l} AB = AC \\ [AI] \text{ ضلع مشترك .} \\ B\hat{A}I = C\hat{A}I \end{array}\right.$

و حسب الحالة الثانية للتقايس فإن المثلثين ABI و ACI متقايسان.

2) – لنثبت أن : $D\hat{A}C = I\hat{C}D$.

لدينا : $B\hat{C}D$ و $B\hat{A}D$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس BD .

إذن : $B\hat{C}D = B\hat{A}D$ ، أي : $\boxed{I\hat{C}D = B\hat{A}D}$ ①

و نعلم أن : $B\hat{A}I = C\hat{A}I$ ، أي : $\boxed{B\hat{A}D = D\hat{A}C}$ ②

و من ① و ② نستنتج أن : $\boxed{D\hat{A}C = I\hat{C}D}$.

3) – أ) -- لنبين أن المثلثين ADC و ICD متشابهان.

للمثلثين ADC و ICD : و $\left\{\begin{array}{l} D\hat{A}C = I\hat{C}D \\ A\hat{D}C = I\hat{D}C \text{ (نفس الزاوية).} \end{array}\right.$

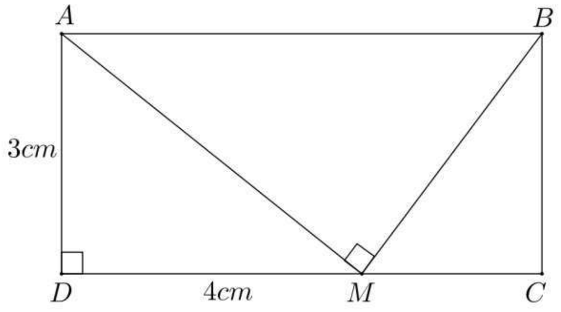
إذن حسب الحالة الأولى للتشابه فإن : ADC و ICD مثلثان متشابهان.

ب) -- لنستنتج أن : $AD \times CI = AC \times CD$.

نعلم أن المثلثين ADC و CDI متشابهان ، إذن : $\dfrac{CD}{AD} = \dfrac{CI}{AC} = \dfrac{DI}{DC}$.

و منه فإن : $\dfrac{CD}{AD} = \dfrac{CI}{AC}$ يعني أن : $\boxed{AD \times CI = AC \times CD}$.

❀ تمرين ② :



1) – لنثبت أن : $AM = 5\,cm$.

لدينا من خلال الشكـل ADM مثلث قائم الزاوية في D .

إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فإن :

$AM^2 = DA^2 + DM^2$ ،

أي :

$$\begin{aligned} AM^2 &= 3^2 + 4^2 \\ &= 9 + 16 \\ &= 25 \end{aligned}$$

و بما أن $AM > 0$ فإن : $AM = \sqrt{5}\,cm$ ، و بالتالي فإن : $\boxed{AM = 5\,cm}$.

2) –أ) -- لنثبت أن المثلثين AMB و MAD متشابهان .

لدينا : $A\hat{D}M = A\hat{M}B$ (زاويتان قائمتان).

و لدينا الرباعي $ABCD$ مستطيل ، إذن : $(AB) \,//\, (DC)$.

نعتبر المتوازيين (AB) و (DC) و القاطع لهما (AM) على التوالي في A و M .

لدينا : $A\hat{M}D$ و $B\hat{A}M$ زاويتان متبادلتان داخليا ، إذن : $B\hat{A}M = A\hat{M}D$.

إذن للمثلثين AMD و BAM : $\left.\begin{aligned} A\hat{D}M = A\hat{M}B \\ B\hat{A}M = A\hat{M}D \end{aligned}\right\}$ و .

و حسب الحالة الأولى للتشابه فإن المثلثين AMD و BAM متشابهان.

ب) -- لنحدد نسبة تشابه المثلثين AMD و BAM :

بما أن المثلثين AMD و BAM متشابهان فإن : $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{BM}{AD} = \dfrac{AM}{MD}$ ، و منه فإن : $\dfrac{AM}{MD} = \dfrac{5}{4}$.

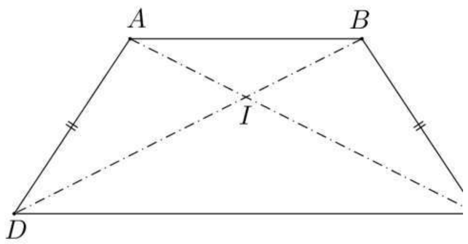
و بالتالي فإن نسبة تشابه المثلثين AMD و BAM هي : $\boxed{\dfrac{5}{4}}$.

3) – لنبين أن : $AM^2 = AB \times MD$.

نعلم مما سبق أن : $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{BM}{AD} = \dfrac{AM}{MD}$ ،

و منه فإن : $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AM}{MD}$ يعني أن : $\boxed{AM^2 = AB \times MD}$.

❀ تمرين ③ :



1) – لنثبت أن المثلثين ABD و BAC متقايسان :

لدينا من خلال الشكل : $ABCD$ شبه منحرف متساوي الساقين $[AD]$ و $[BC]$.

إذن : $\left.\begin{array}{l} AD = BC \\ B\hat{A}D = A\hat{B}C \end{array}\right\}$ و .

للمثلثين ABD و BAC : $\left.\begin{array}{l} AD = BC \\ [AB] \text{ (ضلع مشترك)}. \\ B\hat{A}D = A\hat{B}C \end{array}\right\}$ و

و حسب الحالة الثانية للتقايس فإن : ABD و BAC متقايسان.

2) – لنثبت أن المثلثين AIB و CID متشابهان :

لدينا : $A\hat{I}B = D\hat{I}C$ (زاويتان متقابلتان بالرأس I).

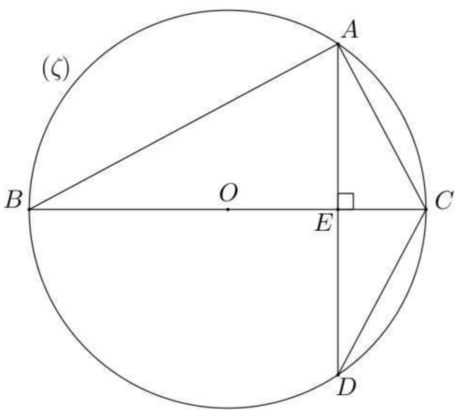
نعتبر المتوازيين (AB) و (CD) و القاطع هما (AC) على التوالي في A و C.

لدينا $C\hat{A}B$ و $A\hat{C}D$ زاويتان متبادلتان داخليا ، إذن : $A\hat{C}D = C\hat{A}B$ ، أي : $I\hat{A}B = I\hat{C}D$.

إذن للمثلثين AIB و CID : $\left.\begin{array}{l} A\hat{I}B = D\hat{I}C \\ I\hat{A}B = I\hat{C}D \end{array}\right\}$ و .

و حسب الحالة الأولى للتشابه فإن المثلثين AIB و CID متشابهان.

❀ تمرين ④ :



1) – لنثبت أن المثلثين ABC و EDC متشابهان :

لدينا : $A\hat{B}C$ و $A\hat{D}C$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس AC.

إذن : $A\hat{B}C = A\hat{D}C$ ، أي : $A\hat{B}C = E\hat{D}C$.

و لدينا من خلال الشكل : $D\hat{E}C$ زاوية قائمة.

و ABC مثلث محاط بالدائرة (ζ) قطرها $[BC]$.

إذن ABC مثلث قائم الزاوية في A ، و منه فإن : $B\hat{A}C = D\hat{E}C$.

للمثلثين ABC و EDC : $\left.\begin{array}{l} A\hat{B}C = E\hat{D}C \\ B\hat{A}C = D\hat{E}C \end{array}\right\}$ و .

و حسب الحالة الأولى للتشابه فإن المثلثين ABC و EDC متشابهان

2) – بين أن المثلثين EAC و EDC متقايسان.

نعلم أن المثلثين ABC و EDC متشابهان ، إذن الزوايا المتناظرة متقايسة ، و منه فإن : $A\hat{C}B = E\hat{C}D$

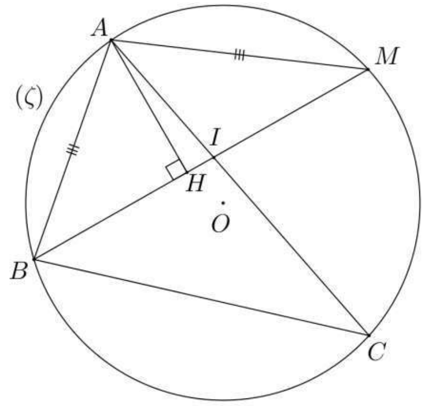
أي : $A\hat{C}E = E\hat{C}D$.

إذن للمثلثين EAC و EDC : $\left.\begin{array}{l} [EC] \text{ (ضلع مشترك)} \\ A\hat{C}E = E\hat{C}D \\ A\hat{E}C = D\hat{E}C \text{ (زاويتان قائمتان)} \end{array}\right\}$.

و حسب الحالة الثالثة للتقايس فإن المثلثين EAC و EDC متقايسان.

❀ تمرين ⑤ :

1) –أ) -- بين أن المثلثين ABI و ABC متشابهان :



لدينا : $A\hat{M}B$ و $A\hat{C}B$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس AB .

إذن : $\boxed{A\hat{M}B = A\hat{C}B}$ ①

و لدينا من خلال الشكل AMB مثلث متساوي الساقين في A .

إذن : $\boxed{A\hat{M}B = A\hat{B}M}$ ②

و من نستنتج أن : $A\hat{C}B = A\hat{B}M$ ، أي : $A\hat{C}B = A\hat{B}I$.

إذن للمثلثين ABI و ABC : $\left.\begin{array}{l} B\hat{A}C = B\hat{A}I \\ A\hat{C}B = A\hat{B}I \end{array}\right\}$ (زاوية مشتركة)

و حسب الحالة الأولى للتشابه فإن : AIB و ABC متشابهان.

ب) -- لنستنتج أن : $AB^2 = AI \times AC$:

نعلم أن المثلثين AIB و ABC متشابهان ، إذن : $\dfrac{AB}{AI} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{BC}{IB}$.

و منه فإن : $\dfrac{AB}{AI} = \dfrac{AC}{AB}$ ، يعني أن : $AB \times AB = AI \times AC$ ، أي : $\boxed{AB^2 = AI \times AC}$.

2) –لنبين أن المثلثين AHB و AHM متقايسان.

نعلم مما سبق أن : $AB = AM$.

لدينا من خلال الشكل : $A\hat{H}B = A\hat{H}M$ (زاويتان قائمتان).

و نعلم أن : $A\hat{M}B = A\hat{B}M$ ، أي : $A\hat{M}H = A\hat{B}H$.

وبما أن في المثلثين AHB و AHM : و $\left.\begin{array}{l} B\hat{A}H + AHM + ABH = 180^\circ \\ MAH + AHM + AMH = 180^\circ \end{array}\right\}$ ، فإن :

$B\hat{A}H + AHM + ABH = MAH + AHM + AMH$ ، و منه فإن : $B\hat{A}H = M\hat{A}H$.

إذن للمثلثين AHB و AHM : و $\left.\begin{array}{l} B\hat{A}H = M\hat{A}H \\ A\hat{B}H = A\hat{M}H \\ AB = AM \end{array}\right\}$.

و حسب الحالة الثالثة للتقايس فإن المثلثين AHB و AHM متقايسان.