الدرس ③: المثلثات المتقايسة والمثلثات المتشابهة

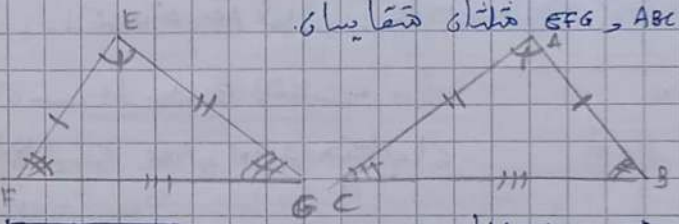
I - مثلثان متقايسان

1) تعريف:

مثلثان متقايسان هما مثلثان قابلان للتطابق.

2) مثال ومصطلحات

ABC و EFG مثلثان متقايسان.



A	B	C
E	F	G

* الأضلاع المتناظرة هي:

$[AB]$ و $[EF]$ ضلعان متناظران
$[AC]$ و $[EG]$ " "
$[BC]$ و $[FG]$ " "

* الزوايا المتناظرة هي:

- $B\hat{A}C$ و $F\hat{E}G$ زاويتان متناظرتان
- $B\hat{C}A$ و $F\hat{G}E$ " "
- $A\hat{B}C$ و $E\hat{F}G$ " "

3) خاصية ①:

إذا كان مثلثان متقايسين فإن أضلاعهما المتناظرة متقايسة وزواياهما المتناظرة متقايسة.

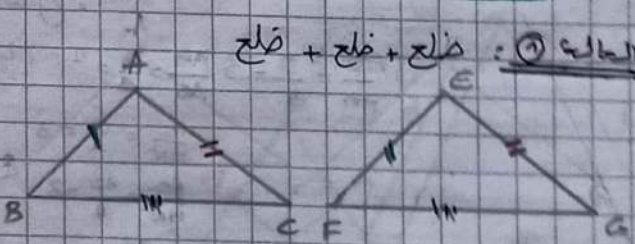
* تطبيق:

لدينا في المثال السابق

$$\begin{cases} AB=EF \\ AC=EG \\ BC=FG \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} A\hat{B}C=E\hat{F}G \\ A\hat{C}B=E\hat{G}F \\ B\hat{A}C=F\hat{E}G \end{cases}$$

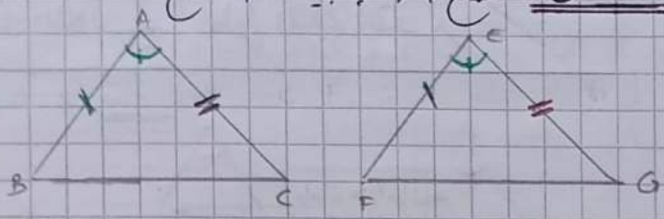
4) حالات التقايس

* الحالة ①: ضلع + ضلع + ضلع



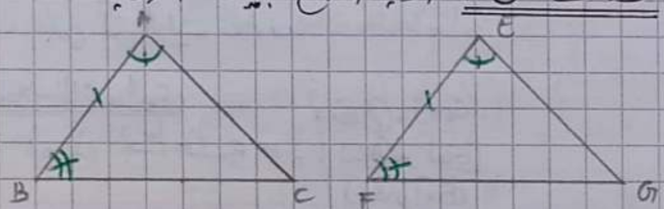
يجب أن نعلم إذا كان: $\begin{cases} AB=EF \\ AC=EG \\ BC=FG \end{cases}$ فإن ABC و EFG مثلثان متقايسان.

* الحالة ②: ضلع + زاوية بينهما + ضلع.



إذا كان: $\begin{cases} AB=EF \\ AC=EG \\ B\hat{A}C=F\hat{E}G \end{cases}$ فإن المثلثان ABC و EFG متقايسان

* الحالة ③: زاوية + ضلع بينهما + زاوية.



إذا كان: $\begin{cases} B\hat{A}C=F\hat{E}G \\ AB=EF \\ A\hat{B}C=E\hat{F}G \end{cases}$ فإن المثلثان ABC و EFG متقايسان

* الحالة ①:

إذا قايست أضلاع مثلث على التوالي أضلاع مثلث آخر فإن هذين المثلثين متقايسان.

* الحالة ②:

إذا قايس ضلعان لمثلث والزاوية المحصورة بينهما على التوالي ضلعين لمثلث آخر والزاوية المحصورة بينهما، فإن هذين المثلثين متقايسان.

* الحالة ③:

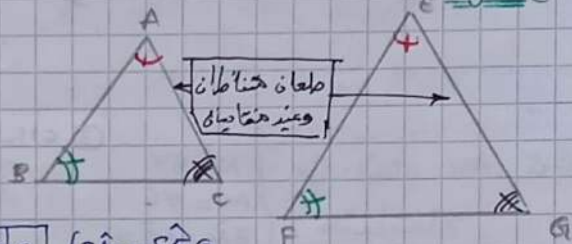
إذا قايست زاويتان لمثلث والضلع المحاذي لهما على التوالي زاويتين لمثلث آخر والضلع المحاذي لهما فإن هذين المثلثين متقايسان.

II - مثلثان متشابهان:

1) تعريف:

يكون مثلثان متشابهين إذا تقايست زوايا أحدهما على التوالي زوايا المثلث الآخر.

2) مثال:



A	B	C
E	F	G

في المثلثين ABC و EFG لدينا: $\begin{cases} B\hat{A}C = F\hat{E}G \\ A\hat{B}C = E\hat{F}G \\ A\hat{C}B = E\hat{G}F \end{cases}$

إذن نقول أن المثلثين ABC و EFG متشابهان.

*** ملاحظة هامة:**

* الأضلاع المتناظرة هي: $\left.\begin{matrix} [AB] \text{ و } [EF] \\ [AC] \text{ و } [EG] \\ [BC] \text{ و } [FG] \end{matrix}\right\}$

* مثلثان متقايسان هما مثلثان متشابهان والعكس غير صحيح

3) خاصية ②:

إذا كان مثلثان متشابهان فإن أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.

بتعبير آخر: إذا كان ABC و EFG مثلثين متشابهين فإن

$$\boxed{\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EG} = \frac{BC}{FG}}$$

*** ملاحظة هامة:**

← في الشكل السابق لدينا: $\frac{EF}{AB} = \frac{EG}{AC} = \frac{FG}{BC} = k$

k تسمى نسبة تشابه المثلثين EFG و ABC بهذا الترتيب

المثلث EFG تكبير للمثلث ABC ونسبة (معامل) التكبير

هو: $\frac{EF}{AB} = k$

← $\frac{1}{k}$ تسمى نسبة تشابه المثلثين ABC و EFG.

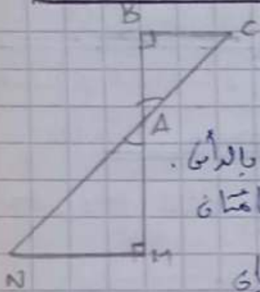
المثلث ABC تصغير للمثلث EFG ومعامل التصغير

هو: $\frac{AB}{EF} = \frac{1}{k}$.

4) حالات التشابه:

أ- الحالة ①:

إذا تقايست زاويتان لمثلث زاويتين لمثلث آخر فإن هذين المثلثين متشابهان.



*** مثال:**

لدينا في الشكل جانبه

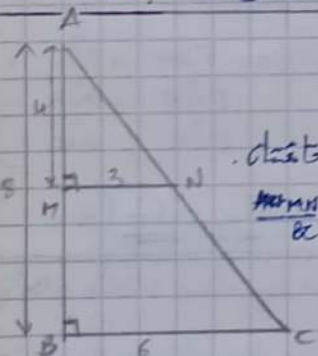
* $B\hat{A}C = M\hat{A}N$ لأنهما زاويتين متقابلتان بالرأس.

* ولدينا: $A\hat{B}C = A\hat{M}N = 90°$ لأنهما زاويتين قائمتان

إذن حسب الحالة ① للتشابه فإن المثلثين ABC و AMN متشابهان.

ب- الحالة ②:

إذا تقايست زاوية لمثلث زاوية لمثلث آخر وكانت أطوال الأضلاع المحاذية لهاتين الزاويتين متناسبة فيما بينها، فإن هذين المثلثين متشابهان.



*** مثال:**

لدينا في الشكل جانبه

* $A\hat{B}C = A\hat{M}N$ لأنهما زاويتان قائمتان.

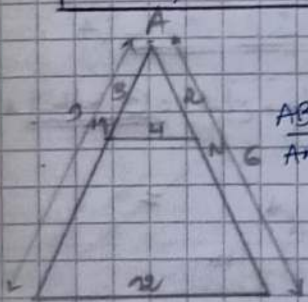
* ولدينا: $\frac{AM}{AB} = \frac{4}{6}$ ... $= \frac{1}{2}$ و $\frac{MN}{BC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

إذن: $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$

إذن حسب الحالة ② للتشابه فإن المثلثين ~~ABC~~ AMN و ABC متشابهان ونسبة تشابههما هي $\frac{1}{2}$

ج- الحالة ③:

إذا كانت أطوال أضلاع مثلث متناسبة مع أطوال أضلاع مثلث آخر فإن هذين المثلثين متشابهان.



*** مثال:**

لدينا: $\frac{AB}{AM} = \frac{9}{3} = 3$

$\frac{AC}{AN} = \frac{6}{2} = 3$

$\frac{BC}{MN} = \frac{12}{4} = 3$

إذن: $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$

إذن حسب الحالة ③ للتشابه، فإن المثلثين ABC و AMN متشابهان ونسبة تشابههما هي 3

* ملاحظات :

* يكون شكلان متشابهين إذا كان لهما نفس الشكل العام وكان أحدهما تكبيرا $(k>1)$ أو تصغيرا $(k<1)$ للآخر.

* نسبة التشابه تقارن بين قياسين لهما نفس الوحدة وتستخدم مثلا في عمل خرائط ورسوم هندسية بمقاييس مصغرة للأشكال الحقيقية مثلا السلم 1 cm لكل 100 m تعني أن 1 cm في الخريطة تمثل 100 m في الواقع.

حالات التشابه

- حالة ① : زاوية + زاوية
- حالة ② : نسبتان متساويتان + زاوية بينهما.
- حالة ③ : 3 نسب متساوية