الدرس ② : المتجهات والإزاحة

الجزء الأول : المتجهات

I - المتجهة

1) عناصر متجهة غير منعدمة:

تعريف:

A و B نقطتان مختلفتان من المستوى

الزوج (A,B) يحدد متجهة يرمز لها بالرمز $\overrightarrow{AB}$

عناصرها هي:

* الاتجاه: هو المستقيم (AB)
* المنحى: هو منحى نصف المستقيم [AB) أي من A نحو B
* المنظم (أو المعيار): هو المسافة AB

- النقطة A تسمى أصل المتجهة $\overrightarrow{AB}$
- النقطة B تسمى طرف المتجهة $\overrightarrow{AB}$

الشكل:

2) المتجهة المنعدمة:

تعريف:

المتجهة $\overrightarrow{AA}$ ليس لها إتجاه ولا منحى ومنظمها يساوي 0 وتسمى المتجهة المنعدمة

ونكتب $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

* إذا كان $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ فإن $A=B$ (أي أن A و B منطبقتان)

3) مقابل متجهة:

* تعريف:

A و B نقطتان. لدينا: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$

المتجهة $\overrightarrow{BA}$ تسمى مقابل المتجهة $\overrightarrow{AB}$

ونكتب: $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

* الشكل الهندسي:

لدينا: $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

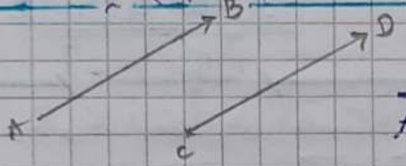
II - تساوي متجهتين:

1) تعريف:

تكون $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ إذا كان:

- $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ لهما نفس الإتجاه أي أن (AB)//(CD)
- $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ لهما نفس المنحى
- $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ لهما نفس المنظم (الطول) أي $AB=CD$

* الشكل:



لدينا $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

2) خاصيات مهمة:

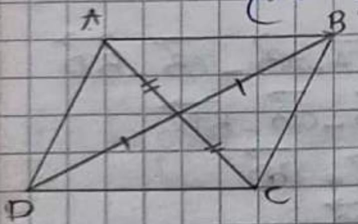
1 - إذا كان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ فإن للقطعتين [AD] و [BC] نفس المنتصف

إذا كان [AD] و [BC] لهما نفس المنتصف فإن: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

2 - إذا كان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ فإن ABDC متوازي أضلاع

إذا كان ABDC متوازي أضلاع فإن: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

* الشكل الهندسي:



الرباعي ABDC متوازي أضلاع:

إذن: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

وللقطعتين [AC] و [BD] نفس المنتصف.

3) تطبيق:

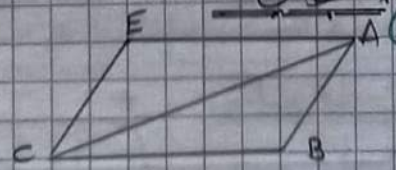
ليكن ABC مثلث

1) أنشئ النقطة E بحيث $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}$

2) حدد طبيعة الرباعي ABCE

* جواب:

1)



2) لدينا: $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}$

إذن الرباعي ABCE متوازي أضلاع

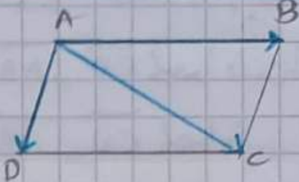
III - مجموع متجهتين:

1) تعريف:

نقول أن المتجهة $\overrightarrow{AC}$ هو مجموع المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ إذا كان ABCD متوازي أضلاع

ونكتب: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

* الشكل الهندسي:



ABCD متوازي أضلاع

إذن: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

2) علاقة شال:

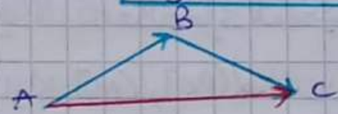
أ- خاصية:

A و B و C نقط من المستوى

لدينا: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

هذه المتساوية تسمى علاقة شال.

ب- الشكل:



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

ج- أمثلة:

لنبسط ما يلي:

* $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GE}$
$=\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GE}$
$=\overrightarrow{EE}=\vec{0}$

* $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{BD}$
$=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{BD}$
$=\vec{0}+\overrightarrow{DB}$
$=\overrightarrow{DB}$

3) تمرين تطبيقي:

ABCD متوازي أضلاع

1) أنشئ النقطتين M و N بحيث:

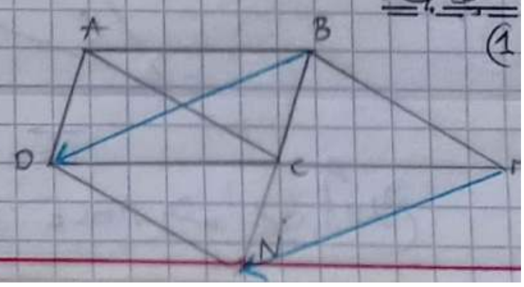
$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

2) بين أن: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BD}$

جواب:

1)



2) لدينا

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}$
$=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}$
$=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$
$=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$
$=\overrightarrow{BD}$

وبالتالي فإن: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BD}$

IV - ضرب متجهة في عدد حقيقي:

1) تعريف:

$\overrightarrow{AB}$ متجهة غير منعدمة و k عدد حقيقي.

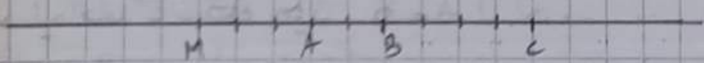
نسمي المتجهة $\overrightarrow{AM}$ جداء المتجهة $\overrightarrow{AB}$ في العدد الحقيقي k إذا كانت M نقطة من المستقيم (AB) ونكتب: $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$ حيث:

* إذا كان $k>0$ فإن $AM=kAB$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM}$ لهما نفس المنحى
* إذا كان $k<0$ فإن $AM=-kAB$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM}$ لهما منحيان متعاكسان.
* إذا كان $k=0$ فإن: $A=M$.

ملاحظة: $0\times\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ و $k\times\vec{0}=\vec{0}$

2) مثال:

$\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{AM}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$



$\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$ أي أن:
- $C\in(AB)$
- $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ لهما نفس المنحى
- $AC=3AB$

$\overrightarrow{AM}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ أي أن:
- $M\in(AB)$
- $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM}$ متعاكسي المنحى
- $AM=\frac{3}{2}AB$

3) المتجهة والمنتصف:

خاصية:

M منتصف $[AB]$ يعني أن:
- $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$
- $\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}$

4) خاصيات:

k عدد حقيقي غير منعدم

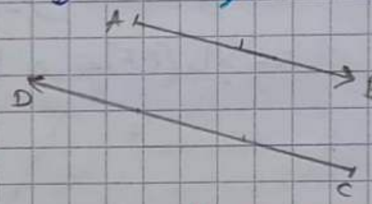
* إذا كان $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ فإن النقط A و B و C مستقيمية.
* إذا كان $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{MN}$ فإن: $(AB)//(MN)$

نقول أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{MN}$ متجهتان مستقيميتان.

مثال: A و B و C نقط غير مستقيمية

لننشئ النقطة D بحيث: $\overrightarrow{CD}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CD}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ يعني أن:
- $(CD)//(AB)$
- $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متعاكستي المنحى
- $CD=\frac{3}{2}AB$



الجزء II: الإزاحة

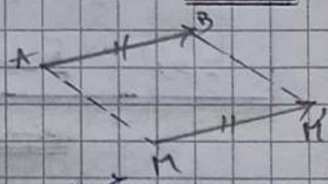
V- الإزاحة:

1) نشاط

A و B و M ثلاث نقط من المستوى.

أنشئ في كل حالة نقطة M' بحيث: $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AB}$

حالة ①



حالة ②

ABM'M متوازي أضلاع

في كلتا الحالتين، نقول أن M' صورة M بالإزاحة T ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$ (التي تحول A إلى B)

2) تعريف:

$\overrightarrow{AB}$ متجهة غير منعدمة

M' صورة M بالإزاحة T ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$ (أو التي تحول A إلى B) يعني أن: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MM'}$

أي أن ABM'M متوازي أضلاع

3) خاصية أساسية:

إذا كانت M' و N' صورتي M و N على التوالي بإزاحة T فإن: $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$

4) تمرين تطبيقي

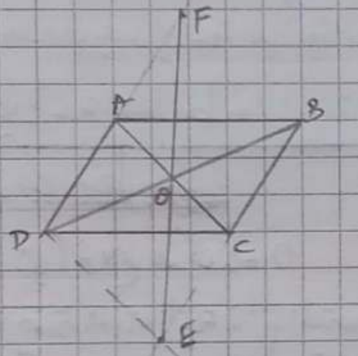
ABCD متوازي أضلاع مركزه O

1) أنشئ النقطة E صورة D بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AC}$
2) أنشئ النقطة F مماثلة D بالنسبة للنقطة A

بين أن O منتصف $[EF]$

* الحل:

1)



2) لدينا E صورة D بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AC}$

إذن: $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AC}$

يعني أن ACED متوازي أضلاع

إذن: ① $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CE}$

وبما أن F مماثلة D بالنسبة للنقطة A

فإن A منتصف $[DF]$

إذن: ② $\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{AD}$

من ① و ② نجد أن: $\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{CE}$

وهذا يعني أن FAEC متوازي أضلاع مركزه O

و $[EF]$ أحد أقطاره.

وبالتالي فإن O منتصف $[EF]$

VI- صور بعض الأشكال بإزاحة:

1) صورة مستقيم:

أ- خاصية ①:

صورة مستقيم بإزاحة هو مستقيم يوازيه

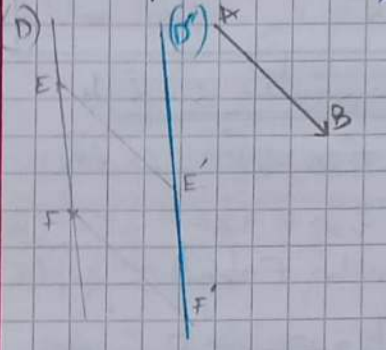
ملاحظة هامة:

لإنشاء صورة مستقيم بإزاحة نأخذ نقطتين مختلفتين على هذا المستقيم ثم ننشئ صورتيهما بنفس الإزاحة

ب- الشكل الهندسي:

$\vec{AB}$ متجهة غير منعدمة و (D) مستقيم

لننشئ (D') صورة (D) بالإزاحة ذات المتجهة $\vec{AB}$



لدينا: $(D) // (D')$

ج- خاصية ②:

صور نقط مستقيمية بالإزاحة هي أيضا نقط مستقيمية. نقول أن الإزاحة تحافظ على استقامية النقط.

د- تمرين تطبيقي:

ABCD متوازي أضلاع مركزه O

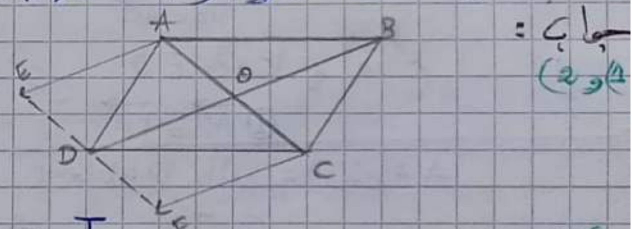
1) أنشئ E صورة A بالإزاحة ذات المتجهة $\vec{OD}$

2) أنشئ F صورة C بالإزاحة ذات المتجهة $\vec{OD}$

3) أثبت أن النقط E و F و D مستقيمية.

جواب:

1) و 2)



3) التعليل

$A \xrightarrow{T} E$

$O \longrightarrow D$

$C \longrightarrow F$

لدينا E و D و F هي على التوالي صور النقط A و O و C بالإزاحة T ذات المتجهة $\vec{OD}$

ولدينا النقط A و O و C مستقيمية

ونعلم أن الإزاحة تحافظ على استقامية النقط

إذن فالنقط E و F و D مستقيمية.

2) صورة مستقيم:

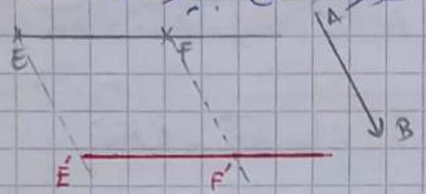
أ- خاصية ③:

صورة المستقيم (EF) بإزاحة هو المستقيم (E'F') بحيث E' و F' هي على التوالي صورتي E و F بنفس الإزاحة ونكون لدينا: $(EF)//(E'F')$

ب- الشكل الهندسي:

$\vec{AB}$ متجهة غير منعدمة و [EF) نصف مستقيم

لننشئ [E'F') صورة [EF) بالإزاحة ذات المتجهة $\vec{AB}$



3) صورة قطعة:

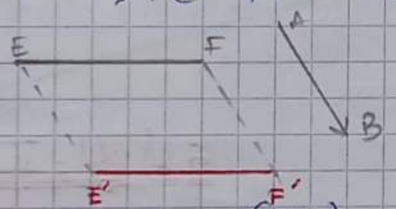
أ- خاصية ④:

صورة قطعة بإزاحة هي قطعة تقايسها. نقول أن الإزاحة تحافظ على المسافة.

ب- الشكل الهندسي:

$\vec{AB}$ متجهة غير منعدمة و [EF] قطعة

لننشئ [E'F'] صورة [EF] بالإزاحة ذات المتجهة $\vec{AB}$



لدينا إذن: $(EF)//(E'F')$ و $EF = E'F'$

4) صورة زاوية:

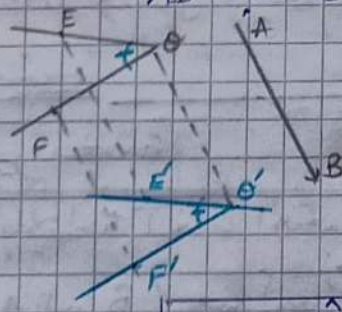
أ- خاصية ⑤:

صورة زاوية بإزاحة هي زاوية تقايسها. نقول أن الإزاحة تحافظ على قياس الزوايا.

ب- الشكل الهندسي:

$\vec{AB}$ متجهة غير منعدمة و $E\hat{O}F$ زاوية

لننشئ الزاوية $E'\hat{O'}F'$ صورة الزاوية $E\hat{O}F$ بالإزاحة ذات المتجهة $\vec{AB}$



لدينا: $\boxed{E\hat{O}F = E'\hat{O'}F'}$

5) صورة دائرة:

أ- خاصية 6:

صورة دائرة (C) مركزها O وشعاعها r بإزاحة هي الدائرة (C') التي مركزها O' صورة O بنفس الإزاحة ولها نفس الشعاع r.

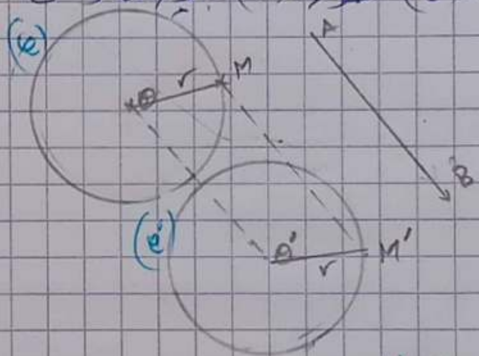
*** ملاحظة هامة:**

لإنشاء صورة دائرة بإزاحة نُنشئ صورة المركز بنفس الإزاحة ثم نحتفظ بنفس الشعاع.

ب- الشكل الهندسي:

$\vec{AB}$ متجهة غير منعدمة و (C) دائرة مركزها O وشعاعها r

لنُنشئ الدائرة (C') صورة (C) بالإزاحة ذات المتجهة $\vec{AB}$



ج) تمرين تطبيقي:

لتكن O و O' نقطتين من المستوى ولتكن (C) الدائرة التي مركزها O وشعاعها $r=\frac{1}{4}OO'$

1) أنشئ (C') صورة (C) بالإزاحة ذات المتجهة $\vec{OO'}$

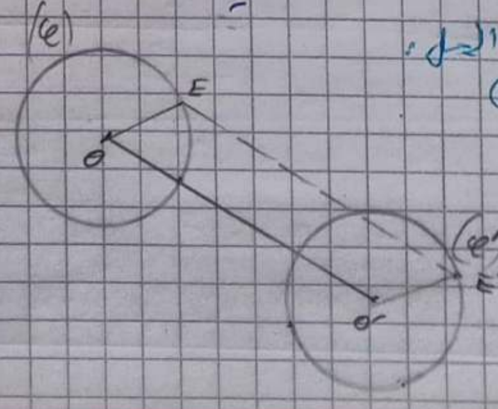
2) لتكن E نقطة من (C) و E' نقطة من المستوى

حيث OEE'O' متوازي أضلاع

بيّن أن E' تنتمي للدائرة (C')

الحل:

1)



2) لدينا: OEE'O' متوازي أضلاع

إذن: $\vec{EE'}=\vec{OO'}$

أي أن النقطة E' صورة E بالإزاحة T ذات المتجهة $\vec{OO'}$

ولدينا (C') هي صورة (C) بنفس الإزاحة T

وبالتالي: $E\in(C)$

فإن: $E'\in(C')$