الدرس ③ : القوى

I - قوة عدد حقيقي:

1) تعريف:

ليكن a عددا حقيقيا و n عددا صحيحا طبيعيا بحيث $n \geq 1$

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ مرة}}$$

ولدينا: $a^1 = a$ ، $a^0 = 1$

a^n ← القوة n للعدد a — الأس (الكتابة) — الأساس (المفرد)

* أمثلة:

* $2005^0 = 1$ * $2007^1 = 2007$

* حالات خاصة:

* $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ * $0^n = 0$

* $(-7)^3 = (-7) \times (-7) \times (-7) = -343$ * $1^n = 1$

* $(-\sqrt{2})^4 = (-\sqrt{2}) \times (-\sqrt{2}) \times (-\sqrt{2}) \times (-\sqrt{2})$ * $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان } n \text{ زوجيا} \\ -1 & \text{إذا كان } n \text{ فرديا} \end{cases}$

$= 2 \times 2 = 4$

2) إشارة قوة:

أ- خاصية:

a عدد حقيقي و n عدد صحيح طبيعي غير منعدم

إشارة القوة a^n

- إذا كان $a > 0$: القوة a^n موجبة
- إذا كان $a < 0$:
  - n عدد زوجي: القوة a^n موجبة
  - n عدد فردي: القوة a^n سالبة

ب- أمثلة:

* $(\sqrt{7})^3 > 0$ لأن الأساس $\sqrt{7}$ موجب.

* $(-\sqrt{11})^{124} > 0$ لأن الأس 124 زوجي.

* $\left(-\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right)^{11} < 0$ لأن الأساس $-\frac{\sqrt{3}}{\pi}$ سالب و الأس 11 فردي.

* $-\sqrt{5}^{12} < 0$ لأن الأساس $\sqrt{5}$ وليس $-\sqrt{5}$.

ج- ملاحظة هامة:

a عدد حقيقي غير منعدم و n عدد صحيح طبيعي

* إذا كان n عددا زوجيا فإن: $(-a)^n = a^n$

* إذا كان n عددا فرديا فإن: $(-a)^n = -a^n$

* تمرين تطبيقي: احسب ما يلي:

$a = (-4)^3$ ، $b = -2^4$ ، $c = -\left(\frac{-2^3}{3}\right)^3$

$d = \left(\frac{-4}{5}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^3$ ، $e = -(-\sqrt{5})^2$ ، $f = \left(-\sqrt{\sqrt{16}}\right)^2$

* الحل:

$a = (-4)^3 = -4^3 = -64$

$b = -2^4 = -16$

$c = -\left(\frac{-2^3}{3}\right)^3 = -\left(\frac{-2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

$d = \left(\frac{-4}{5}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + -\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$= \frac{16}{25} - \frac{1}{8} = \frac{128-25}{200} = \frac{103}{200}$

$e = -(-\sqrt{5})^2 = -(\sqrt{5})^2 = -5$

$f = \left(-\sqrt{\sqrt{16}}\right)^2 = \sqrt{\sqrt{16}}^2 = \sqrt{16} = 4$

3) خاصية أسها سالب

أ- تعريف:

a و b عددان حقيقيان غير منعدمين و n عدد صحيح طبيعي

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad ، \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

ب- أمثلة:

* $\sqrt{2}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

* $\left(\frac{-3}{\sqrt{5}}\right)^{-2} = \left(\frac{\sqrt{5}}{-3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$

* $(3+\sqrt{2})^{-n} = \frac{1}{3+\sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{2}}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \frac{3-\sqrt{2}}{3^2-\sqrt{2}^2}$

$= \frac{3-\sqrt{2}}{9-2} = \frac{3-\sqrt{2}}{7}$

II - العمليات على القوى:

1) نشاط:

1) أكتب الأعداد التالية على شكل قوة العدد 2

$A = 2^5 \times 2^3$ ، $B = 16^5$ ، $C = 8^3 \times 4^{32}$

2) أكتب العدد التالي على شكل $2^n \times 3^p$ حيث n و p عددان صحيحان نسبيان.

$D = \frac{8^2 \times 9^3}{3^5 \times 2^4}$

* الحل:

$A = 2^5 \times 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$

$B = 16^5 = (2^4)^5 = 2^{4 \times 5} = 2^{20}$

التمرين A

$$A=\frac{a^2\times(a^5)^3}{(a\times a^2)^4}=\frac{a^2\times a^{5\times3}}{(a^{1+2})^4}=\frac{a^2\times a^{15}}{(a^3)^4}$$

$$=\frac{a^{2+15}}{a^{3\times4}}=\frac{a^{17}}{a^{12}}=a^{17-12}=a^5$$

$$B=\frac{a^{-5}\times b^{-3}\times a^{-2}}{a^3\times(b^{-2})^3}=\frac{a^{-5+(-2)}\times b^{-3}}{a^3\times b^{-2\times3}}$$

$$=\frac{a^{-7}\times b^{-3}}{a^3\times b^{-6}}=a^{-7-3}\times b^{-3-(-6)}$$

$$=a^{-10}\times b^3$$

$$C=\left[1+\left(\frac{3-a}{1+a}\right)^{-1}\right]^{-1}$$

$$=\left[1+\frac{1+a}{3-a}\right]^{-1}$$

$$=\left[\frac{3-a+1+a}{3-a}\right]^{-1}=\left(\frac{4}{3-a}\right)^{-1}=\frac{3-a}{4}$$

التمرين 1

1) حساب العدد 10

أ- خاصية:

n عدد صحيح نسبي

$10^n=1000\ldots0$ (n من الأصفار) $10^{-n}=0,000\ldots01$ (n من الأصفار)

ب- أمثلة:

$*10^7=10\,000\,000$ $*10^4=10\,000$

$*10^{-9}=0,000000001$ $*10^{-5}=0,00001$

2) الكتابة العلمية:

أ- تعريف:

x عدد عشري و n عدد صحيح نسبي

الكتابة العلمية للعدد x هي $x=a\times10^n$ أو $x=-a\times10^n$

حيث العدد a: $1\leq a<10$

ب- أمثلة:

1) $a=3452=3,452\times10^3$

$b=0,00000234=2,34\times10^{-6}$

$c=678,25\times10^5$

$=6,7825\times10^2\times10^5$

$=6,7825\times10^{2+5}=6,7825\times10^7$

$C=8^3\times4^{32}=(2^3)^3\times(2^2)^{32}=2^{3\times3}\times2^{2\times32}$

$=2^9\times2^{64}=2^{9+64}=2^{73}$

2)

$$D=\frac{8^2\times9^3}{3^5\times2^4}=\frac{(2^3)^2\times(3^2)^3}{3^5\times2^4}=\frac{2^{3\times2}\times3^{2\times3}}{3^5\times2^4}$$

$$=\frac{2^6\times3^6}{3^5\times2^4}=2^{6-4}\times3^{6-5}=2^2\times3^1$$

2) خاصيات:

a و b عددان حقيقيان غير منعدمين، و m و n عددان صحيحان نسبيان:

$a^n\times a^m=a^{n+m}$ $a^n\times b^n=(a\times b)^n$

$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$ $\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$

$(a^n)^m=a^{n\times m}$

3) أمثلة:

$a=\sqrt{5}^3\times\sqrt{5}^{-7}=\sqrt{5}^{3+(-7)}=\sqrt{5}^{-4}=\frac{1}{\sqrt{5}^4}=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}$

$b=\sqrt{5}^3\times\sqrt{7}^3=(\sqrt{5}\times\sqrt{7})^3=\sqrt{35}^3$

$=\sqrt{35}^2\sqrt{35}=35\sqrt{35}$

$c=3^{-2}\times\sqrt{3}^{-2}\times\sqrt{2}^{-2}=(3\times\sqrt{3}\times\sqrt{2})^{-2}$

$=(3\sqrt{6})^{-2}=\frac{1}{(3\sqrt{6})^2}=\frac{1}{9\times6}=\frac{1}{54}$

$d=\frac{\sqrt{7}^3}{\sqrt{7}^{-2}}=\sqrt{7}^{3-(-2)}=\sqrt{7}^{3+2}=\sqrt{7}^5$

$=\sqrt{7}^4\sqrt{7}=(\sqrt{7}^2)^2=49\sqrt{7}$

$e=\frac{\sqrt{45}^3}{\sqrt{5}^3}=\left(\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}\right)^3=\sqrt{\frac{45}{5}}^3=\sqrt{9}^3=3^3=27$

$f=(\sqrt{7}^2)^3=7^3=343$

$g=\left(\sqrt{\frac{3}{2}^4}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{3}{2}^2}\right)^4=\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{3^4}{2^4}=\frac{81}{16}$

* تبسيط عبارة:

a و b عددان حقيقيان غير منعدمين و $a\neq3$

بسط ما يلي: $A=\frac{a^2\times(a^5)^3}{(a\times a^2)^4}$ $B=\frac{a^{-5}\times b^{-3}\times a^{-2}}{a^3\times(b^{-2})^3}$

$C=\left[1+\left(\frac{3-a}{1+a}\right)^{-1}\right]^{-1}$