

# الترتيب والعمليات

## I. مقارنة عددين حقيقيين :

### خاصية

لمقارنة عددين حقيقيين  $a$  و  $b$  نحدد إشارة فرقهما:

✓ إذا كان  $a - b \geq 0$  فإن  $a \geq b$

✓ إذا كان  $a - b \leq 0$  فإن  $a \leq b$

### مثال :

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3 \times 2 - 1 \times 5}{5 \times 2} = \frac{6 - 5}{10} = \frac{1}{10}$$

لنقارن  $\frac{3}{5}$  و  $\frac{1}{2}$  : إذن نحسب فرقهما

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{2} \geq 0 \quad \text{لأنها موجبة إذن} \quad \frac{3}{5} \geq \frac{1}{2} \quad \text{وبالتالي}$$

## II. الترتيب والعمليات :

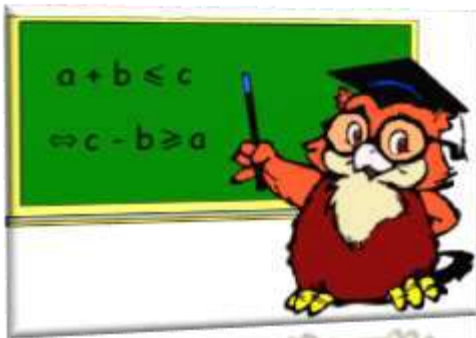
### 1. الترتيب والجمع والفرق :

#### خاصية 1

$a$  و  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية :

✓ إذا كان  $a \leq b$  فإن  $a + c \leq b + c$  والعكس صحيح

✓ إذا كان  $a \leq b$  فإن  $a - c \leq b - c$  والعكس صحيح



### أمثلة :

1- لنقارن  $1 + \sqrt{5}$  و  $3 + \sqrt{5}$  لدينا  $1 \leq 3$  إذن  $1 + \sqrt{5} \leq 3 + \sqrt{5}$

2-  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان بحيث  $a \leq b$

لنقارن  $a - 2\sqrt{3}$  و  $b - 2\sqrt{3}$  :

لدينا  $a \leq b$  إذن  $a - 2\sqrt{3} \leq b - 2\sqrt{3}$

#### خاصية 2

$a$  و  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية :

✓ إذا كان  $a \leq b$  و  $c \leq d$  فإن  $a + c \leq b + d$

مثال : لدينا  $a \leq 5$  و  $3 \geq b$  لنبين أن  $a + b \leq 8$

لدينا  $a \leq 5$  و  $b \leq 3$  إذن  $a + b \leq 5 + 3$  وبالتالي  $a + b \leq 8$

## 2. الترتيب والضرب :

### خاصية

$a$  و  $b$  و  $k$  أعداد حقيقية :

✓ إذا كان  $a \leq b$  و  $k > 0$  فإن  $a \times k \leq b \times k$

✓ إذا كان  $a \leq b$  و  $k < 0$  فإن  $a \times k \geq b \times k$

### أمثلة :

لدينا  $2 \leq 5$  إذن  $3 \times 2 \leq 3 \times 5$  وبالتالي  $6 \leq 15$   
لدينا  $2 \leq 5$  إذن  $-3 \times 2 \geq -3 \times 5$  وبالتالي  $-6 \geq -15$

## 3. الترتيب والمقلوب :

### خاصية

$a$  و  $b$  عدنان حقيقيان موجبان قطعاً :

✓ إذا كان  $a \leq b$  فإن  $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

✓ إذا كان  $a \geq b$  فإن  $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$

➤ لدينا  $2 \leq 4$  إذن  $\frac{1}{4} \geq \frac{1}{2}$

➤ لدينا  $\frac{1}{5\sqrt{2}} \geq \frac{1}{2\sqrt{5}}$  إذن  $5\sqrt{2} \leq 2\sqrt{5}$

## 4. خاصيات أخرى :

### خاصية

$a$  و  $b$  عدنان حقيقيان موجبان :

✓ إذا كان  $a \leq b$  فإن  $a^2 \leq b^2$

✓ إذا كان  $a \leq b$  فإن  $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

ملاحظة : إذا كان  $a$  و  $b$  سالبان فإنه إذا كان  $a \leq b$  فإن  $a^2 \geq b^2$

### أمثلة :

➤ لنقارن  $2\sqrt{5}$  و  $3\sqrt{2}$  : لدينا  $(3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$  و  $(2\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 = 20$

وبما أن  $18 < 20$  إذن  $(3\sqrt{2})^2 < (2\sqrt{5})^2$  وبالتالي  $3\sqrt{2} < 2\sqrt{5}$

➤ لنقارن  $-2\sqrt{2}$  و  $-3$  : لدينا  $(2\sqrt{2})^2 = 4 \times 2 = 8$  و  $3^2 = 9$

لدينا  $8 < 9$  إذن  $(2\sqrt{2})^2 < 3^2$  وبالتالي  $2\sqrt{2} < 3$  وبالتالي  $-2\sqrt{2} > -3$

### III. التآطير :

#### تعريف

$a$  و  $b$  و  $x$  أعداد حقيقية بحيث  $a \leq b$  :  
الكتابة  $a \leq x \leq b$  تسمى تآطيراً للعدد  $x$

#### 1. تآطير مجموع :

نعتبر جميع الأعداد الحقيقية :

$$\text{إذا كان } \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases} \text{ فإن } a + c \leq x + y \leq b + d$$

أمثلة :

➤  $x$  و  $y$  عدنان حقيقيان بحيث :  $2 \leq x \leq 5$  و  $-3 \leq y \leq -1$  أطر  $x + y$  :

$$\text{لدينا } 2 + (-3) \leq x + y \leq 5 + (-1) \text{ إذن } -1 \leq x + y \leq 4 \text{ وبالتالي}$$

➤  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان بحيث :  $1 \leq a \leq 6$  و  $-4 \leq a \leq 10$  أطر  $a + b$  :

$$\text{لدينا } 1 + (-4) \leq a + b \leq 6 + 10 \text{ إذن } -3 \leq a + b \leq 16$$

#### 2. تآطير فرق :

نعتبر جميع الأعداد الحقيقية :

$$\text{إذا كان } \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases} \text{ فإن } a - d \leq x - y \leq b - c$$

**مثال 1 :**  $x$  و  $y$  عدنان حقيقيان بحيث :  $2 \leq x \leq 5$  و  $1 \leq y \leq 6$

$$\text{أطر } x - y \text{ : أولاً نأطر } -y \text{ } \begin{cases} 1 \leq y \leq 6 \\ -6 \leq -y \leq -1 \end{cases} \text{ إذن } \begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ -6 \leq -y \leq -1 \end{cases}$$

$$\text{إذن } 2 - 6 \leq x - y \leq 5 - 1 \text{ وبالتالي } -4 \leq x - y \leq 4$$

**مثال 2 :**  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان بحيث :  $1 \leq a \leq 3$  و  $-7 \leq b \leq -2$

$$\text{أطر } a - b \text{ : أولاً نأطر } -b \text{ } \begin{cases} -7 \leq b \leq -2 \\ 2 \leq -b \leq 7 \end{cases} \text{ إذن } \begin{cases} 1 \leq a \leq 3 \\ 2 \leq -b \leq 7 \end{cases}$$

$$\text{إذن } 1 + 2 \leq a - b \leq 3 + 7 \text{ وبالتالي } 3 \leq a - b \leq 10$$

### 3. تأطير جداء :

#### الحالة 1

نعتبر جميع الأعداد حقيقية موجبة : إذا كان

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$$

فإن  $a \times c \leq x \times y \leq b \times d$

مثال :  $x$  و  $y$  عدنان حقيقيان بحيث :  $2 \leq x \leq 5$  و  $1 \leq y \leq 3$  أطر  $x \times y$  :

لدينا  $\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ 1 \leq y \leq 3 \end{cases}$  إذن  $2 \times 1 \leq x \times y \leq 5 \times 3$  إذن  $2 \leq xy \leq 15$

#### الحالة 2

$a$  و  $b$  عدنان حقيقيان موجبان و  $c$  و  $d$  عدنان حقيقيان سالبان :

إذا كان  $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$  فإن  $b \times c \leq x \times y \leq a \times d$

مثال :  $x$  و  $y$  عدنان حقيقيان بحيث :  $3 \leq x \leq 7$  و  $-5 \leq y \leq -2$  أطر  $xy$  :

أولاً يجب أن تكون في حالة الضرب الأعداد المؤطرة ل  $y$  موجبة إذن :  $\begin{cases} -5 \leq y \leq -2 \\ -(-2) \leq -y \leq -(-5) \end{cases}$

إذن أصبحت جميع الأعداد المؤطرة ل  $x$  و  $y$  موجبة  $\begin{cases} 3 \leq x \leq 7 \\ 2 \leq -y \leq 5 \end{cases}$

إذن  $3 \times 2 \leq x \times (-y) \leq 7 \times 5$  إذن  $6 \leq -xy \leq 35$  ولكن مطلوب منا أن نأطر  $xy$

وليس  $-xy$  إذن يجب أن نتخلص من إشارة - كما يلي :  $\begin{cases} 6 \leq -xy \leq 35 \\ -35 \leq -(-xy) \leq -6 \end{cases}$

وبالتالي  $-35 \leq xy \leq -6$

#### 4. تأطير مقلوب :

$x$  و  $a$  و  $b$  أعداد حقيقية بحيث  $a \leq x \leq b$

$$\frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a} \quad \text{تكافئ}$$

مثال : لدينا  $2 \leq x \leq 4$  إذن  $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$

#### 5. تأطير خارج :

#### الحالة 1

نعتبر جميع الأعداد حقيقية موجبة : إذا كان  $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$

فإن  $\frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}$  بحيث  $y \neq 0$  و  $c \neq 0$  و  $d \neq 0$

لا تنسى عندما نضرب  
أطراف متفاوتة في إشارة  
سالبة نقلب الترتيب

**مثال :**  $x$  و  $y$  عددان حقيقيان بحيث :  $6 \leq x \leq 10$  و  $2 \leq y \leq 3$  أطر  $\frac{x}{y}$  :

$$\text{لدينا } \frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y} \text{ إذن نأطر أولاً } \frac{1}{y} : \text{ إذن } \begin{cases} 2 \leq y \leq 3 \\ \frac{1}{3} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \text{ لدينا } \begin{cases} 6 \leq x \leq 10 \\ \frac{1}{3} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \text{ إذن}$$

لاحظ أن جميع الأعداد المؤطرة ل  $x$  و  $\frac{1}{y}$  هي موجبة إذن سنقوم بعملية الضرب بدون قلب الترتيب

$$6 \times \frac{1}{3} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 10 \times \frac{1}{2} \text{ إذن } \frac{6}{3} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{10}{2} \text{ وبالتالي } 2 \leq \frac{x}{y} \leq 5$$

### الحالة 2

$a$  و  $b$  عددان حقيقيان موجبان و  $c$  و  $d$  عددان حقيقيان سالبان :

$$\text{إذا كان } \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases} \text{ فإن } \frac{b}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{a}{c} \text{ بحيث } y \neq 0 \text{ و } c \neq 0 \text{ و } d \neq 0$$

**مثال :**  $x$  و  $y$  عددان حقيقيان بحيث :  $6 \leq x \leq 10$  و  $-3 \leq y \leq -2$  أطر  $\frac{x}{y}$  :

$$\text{لدينا } \frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y} \text{ إذن نأطر أولاً } \frac{1}{y} : \text{ إذن } \begin{cases} -3 \leq y \leq -2 \\ \frac{1}{-2} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{-3} \end{cases} \text{ تانياً نأطر } \frac{1}{y} \text{ لكن}$$

$$\text{لاحظ أن الأعداد المؤطرة ل } \frac{1}{y} \text{ سالبة إذن نحولها إلى أعداد موجبة كما يلي } \begin{cases} \frac{1}{-2} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{-3} \\ \frac{1}{3} \leq -\frac{1}{y} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

إذن جميع الأعداد المؤطرة ل  $x$  و  $-\frac{1}{y}$  هي موجبة إذن سنقوم بعملية

$$\text{الضرب } 6 \times \frac{1}{3} \leq x \times \left(-\frac{1}{y}\right) \leq 10 \times \frac{1}{2} \text{ إذن } \frac{6}{3} \leq -\frac{x}{y} \leq \frac{10}{2} \text{ إذن } 2 \leq -\frac{x}{y} \leq 5 \text{ ولكن}$$

طُلب منا أن نأطر  $\frac{x}{y}$  وليس  $-\frac{x}{y}$  إذن يجب أن نتخلص من إشارة - كما يلي :  $-5 \leq -\left(-\frac{x}{y}\right) \leq -2$

$$\text{وبالتالي } -5 \leq \frac{x}{y} \leq -2$$

