الترتيب و العمليات

I _ مقارنة عددين حقيقيين

الطريقة الأولى: تحديد إشارة الفرق

قاعدة: a و b عددان حقيقيان .

$a \le b$ يعني $a-b \le 0$

$a \ge b$ يعني $a-b \ge 0$

مثال1: -- لنقارن العددين : $\frac{-11}{13}$ و $\frac{-7}{9}$

نحسب فرقهما:

$$\left(\frac{-11}{13}\right)-\left(\frac{-7}{9}\right)=\frac{-11}{13}+\frac{7}{9}=\frac{-99+91}{117}=\frac{-8}{117}<0$$

إذن $\left(\frac{-11}{13}\right)-\left(\frac{-7}{9}\right)<0$ و منه $\left(\frac{-11}{13}\right)<\left(\frac{-7}{9}\right)$

مثال2: -- a و b عددان حقيقيان موجبان .

أثبت أن : $a+b \ge 2\sqrt{ab}$

لنقارن $a+b$ و $2\sqrt{ab}$ بدراسة إشارة فرقهما:

$$(a+b)-2\sqrt{ab}=\sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2-2\sqrt{ab}=\sqrt{a}^2-2\sqrt{ab}+\sqrt{b}^2$$

$=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \ge 0$ (هذه قوة موجبة لأن أسها عدد زوجي)

بما أن $(a+b)-2\sqrt{ab} \ge 0$ فإن $a+b \ge 2\sqrt{ab}$

تمرين: قارن كل عددين مما يلي:

$2\sqrt{3}-4$ و $\sqrt{3}-5$ ؛؛ $\frac{13}{12}$ و $\frac{15}{14}$ ؛؛ $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

2) x عدد حقيقي موجب قطعا. بين أن $x+\frac{1}{x} \ge 2$.

3) a و b عددان حقيقيان موجبان .

قارن بين $(a+b)^2$ و $4ab$

الطريقة الثانية: المقارنة باستعمال خصائص الترتيب:

II _ الترتيب و العمليات :

1-الترتيب والمربع و الجذر المربع:

قاعدة: a و b عددان حقيقيان موجبان:

$a \le b$ يعني $a^2 \le b^2$

$a \le b$ يعني $\sqrt{a} \le \sqrt{b}$

مثال1: لنقارن $3\sqrt{2}$ و $2\sqrt{3}$ (عددان موجبان)

نقارن مربعيهما: $\left(3\sqrt{2}\right)^2=3^2\times\sqrt{2}^2=9\times2=18$

و $\left(2\sqrt{3}\right)^2=2^2\times\sqrt{3}^2=4\times3=12$

بما أن $18>12$ فإن $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$

مثال2: لنقارن $\sqrt{23}$ و $\sqrt{37}$ (عددان موجبان)

بما أن $37>23$ فإن $\sqrt{37} > \sqrt{23}$

تمرين: 1-- قارن كل عددين مما يلي:

$\sqrt{17}$ و $\sqrt{13}$ ؛؛ $2\sqrt{10}$ و $3\sqrt{5}$ ؛؛ $5\sqrt{2}$ و 7

2-- حدد إشارة كل عدد من الأعداد التالية :

أ – $A=8-6\sqrt{2}$

ب – $B=5\sqrt{2}-4\sqrt{3}$

3-- a عدد حقيقي بحيث $a>1$:

بين أن: $a^2 > a > \sqrt{a} > 1$

2-الترتيب والجمع: إضافة (أو طرح) نفس العدد إلى طرفي متفاوتة

a و b و m أعداد حقيقية .

$a \le b$ يعني أن : $a+m \le b+m$

مثال1: لنقارن $\sqrt{7}+3$ و $\sqrt{5}+3$

لدينا $7>5$ إذن $\sqrt{7} > \sqrt{5}$ و بالتالي $\sqrt{7}+3 > \sqrt{5}+3$

مثال2: علما أن $a>2$ قارن $a-5$ و -3.

لدينا $a>2$ إذن $a-5>2-5$ وبالتالي $a-5>-3$.

تمرين: قارن كل عددين مما يلي:

$\sqrt{10}+5$ و $5+2\sqrt{2}$ ؛؛ $11-2\sqrt{3}$ و $15-2\sqrt{3}$

$\sqrt{3}+\sqrt{5}$ و $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ ؛؛ $\sqrt{11}-5$ و $2\sqrt{3}-5$

نتيجة: جمع متفاوتتين طرفا بطرف

$$a+m \le b+n \Leftarrow \begin{cases} a \le b \\ m \le n \end{cases}$$

مثال: لنقارن $\sqrt{5}+1{,}8$ و $\sqrt{7}+2$

لدينا $\sqrt{7} > \sqrt{5}$ (لأن $7>5$) و $2>1{,}8$ إذن $\sqrt{7}+2 > \sqrt{5}+1{,}8$

3) – الترتيب والضرب :ضرب طرفي المتفاوتة في نفس العدد≠0

a و b و c أعداد حقيقية .

♦ ($a \le b$ و $c>0$) يعني $a \times c \le b \times c$

♦ ($a \le b$ و $c<0$) يعني $a \times c \ge b \times c$

مثال1: لنقارن $23\sqrt{5}$ و $19\sqrt{5}$

لدينا ($23>19$ و $\sqrt{5}$ عدد موجب) إذن: $23\sqrt{5} > 19\sqrt{5}$

مثال2: لنقارن $-3\sqrt{11}$ و $-3\sqrt{6}$

لدينا ($\sqrt{11} > \sqrt{6}$ و -3 عدد سالب) إذن: $-3\sqrt{11} < -3\sqrt{6}$

تمرين: قارن كل عددين مما يلي:

1) – a و b عددان حقيقيان بحيث : $a<b$.

قارن : $\frac{1}{2}a$ و $\frac{1}{2}b$ ؛؛ $-\sqrt{3}\times a$ و $-\sqrt{3}\times b$

2) – قارن : $-3\sqrt{5}$ و $-\sqrt{44}$ ؛؛ $-4\sqrt{3}$ و -7

$\sqrt{10}-2\sqrt{5}$ و $\sqrt{10}-3\sqrt{2}$

الترتيب و العمليات

نتيجة: ضرب متفاوتتين طرفا بطرف:

a و b و m و n أعداد موجبة: $\begin{cases} a \le b \\ m \le n \end{cases} \Rightarrow a \times m \le b \times n$

مثال: لنقارن $18\sqrt{5}$ و $21\sqrt{7}$ (أعداد موجبة)

لدينا $21 > 18$ و $\sqrt{7} > \sqrt{5}$ (لأن $7 > 5$) إذن $21\sqrt{7} > 18\sqrt{5}$

4)– الترتيب والمقلوب :

a و b عددان حقيقيان لهما نفس الإشارة وغير منعدمين.

$a \le b$ تعني أن $\frac{1}{a} \ge \frac{1}{b}$.

مثال: لنقارن $\frac{1}{\sqrt{3}}$ و $\frac{1}{2}$

لدينا $2 > \sqrt{3}$ (لأن $2^2 > \sqrt{3}^2$) إذن: $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$

تمرين: قارن كل عددين مما يلي:

$\frac{1}{2\sqrt{5}+3}$ و $\frac{1}{\sqrt{21}+3}$ ؛؛ $\frac{1}{2\sqrt{5}}$ و $\frac{1}{5\sqrt{2}}$ ؛؛ $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ و $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

تمرين:

1- أنشر و بسط $\left(3+\sqrt{2}\right)^2$ و $\left(2+\sqrt{7}\right)^2$

2- قارن $6\sqrt{2}$ و $4\sqrt{7}$

3- قارن $\left(3+\sqrt{2}\right)^2$ و $\left(2+\sqrt{7}\right)^2$

4- استنتج مقارنة $3+\sqrt{2}$ و $2+\sqrt{7}$

تمرين:

نعتبر العددين: $b = \frac{5\sqrt{11}+1}{7}$ و $a = \frac{3}{\sqrt{11}-2}$

1- اجعل مقام العدد a عددا جذريا (أزل الجذر المربع من المقام)

2- بين أن: $b - a = \frac{2\sqrt{11}-5}{7}$

3- قارن $2\sqrt{11}$ و 5

4 - استنتج مقارنة a و b.

تمرين :

1) – قارن : $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ و $\sqrt{5}+2$.

2) – بين أن : $\sqrt{3}-\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

و أن : $\sqrt{5}-2 = \frac{1}{\sqrt{5}+2}$.

3) – استنتج مقارنة العددين : $\sqrt{5}-2$ و $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

تمرين : x قياس زاوية حادة:

بين أن $(\sin(x)+\cos(x))^2 \ge 3\sin(x)\cos(x)$

III _ التأطير :

1– تأطيـر مجموع عددين :

أ- إضافة(أو طرح) نفس العدد إلى تأطير:

a و b و m و c أعداد حقيقية:

$a \le m \le b$ يعني $a+c \le m+c \le b+c$

*** مثال:** x و y عددان حقيقيان بحيث :

$3 \le x \le 8$ و $2 \le y+7 \le 5$ أطر $x+8$ و y

لدينا $3 \le x \le 8$ إذن $3+8 \le x+8 \le 8+8$

و بالتالي: $\boxed{11 \le x+8 \le 16}$

لدينا $2 \le y+7 \le 5$ إذن $2-7 \le y+7-7 \le 5-7$

و بالتالي $\boxed{-4 \le y \le -2}$

ب – جمع تأطيرين طرفا بطرف:

a و b و m و n و c و d أعداد حقيقية:

$\begin{cases} a \le m \le b \\ c \le n \le d \end{cases} \Rightarrow a+c \le m+n \le b+d$

*** مثال** x و y عددان حقيقيان بحيث :

$-5 \le x \le -3$ و $5 \le y \le 7$ أطر $x+y$

$\begin{cases} -5 \le x \le -3 \\ 5 \le y \le 7 \end{cases} \Rightarrow -5+5 \le x+y \le -3+7$

و بالتالي $\boxed{0 \le x+y \le 4}$

3) – تأطيـر فرق عددين: a و b و m و n و c و d أعداد حقيقية:

$\begin{cases} a \le m \le b \\ c \le n \le d \end{cases} \Rightarrow a-d \le m-n \le b-c$

*** مثال** x و y عددان حقيقيان بحيث :

$-5 \le x \le -3$ و $5 \le y \le 7$ أطر $x-y$

$\begin{cases} -5 \le x \le -3 \\ 5 \le y \le 7 \end{cases} \Rightarrow -5-7 \le x+y \le -3-5$

و بالتالي $\boxed{-12 \le x+y \le -8}$

تمرين: x و y و z أعداد حقيقية بحيث :

$6 \le x \le 9$ و $-5 \le y \le -2$ و $-4 \le z \le 5$

أطر ما يلي : $x+1$ و $z-2$ و $x+y$ و $y+z$

$y-x$ و $z-y$ و $x+y-z$ و $y-x+6$

4– تأطيـر جداء عددين :

أ – ضرب(أو قسمة) تأطير في نفس العدد

1) : الضرب في نفس العدد الموجب قطعا: **لا يتغير الترتيب**

a و b و m و k أعداد حقيقية:

$a \times k \le m \times k \le b \times k \Leftrightarrow (k > 0 \text{ و } a \le m \le b)$

الترتيب و العمليات

لدينا $1 \le x \le 5$ و بما أن $5 > 0$ (عدد موجب)

فإن $1\times 5 \le x\times 5 \le 5\times 5$ أي $\boxed{5 \le 5x \le 25}$

2) : الضرب في نفس العدد السالب قطعا: **يتغير الترتيب**

a و b و m و k أعداد حقيقية:

$(k<0$ و $a \le m \le b) \Leftrightarrow k\times b \le k\times m \le k\times a$

* **مثال** a عدد حقيقي بحيث : $3 \le a \le 8$ أطر $-4a$

لدينا $3 \le a \le 8$ و بما أن $-4 < 0$ (عدد موجب) فإن

$-4\times 3 \ge -4\times a \ge -4\times 8$ أي $\boxed{-12 \ge -4x \ge -32}$

ب- تأطير جداء عددين لهما نفس الإشارة

الأعداد موجبة: ضرب متفاوتتين طرفا بطرف دون تغيير الترتيب:

a و b و m و n و c و d أعداد حقيقية **موجبة:**

$$a\times c \le m\times n \le b\times d \Leftarrow \begin{cases} a \le m \le b \\ c \le n \le d \end{cases}$$

* **مثال** x و y عددان حقيقيان بحيث :

$5 \le x \le 6$ و $5 \le y \le 9$ (أعداد موجبة) أطر xy

لدينا $\begin{cases} 5 \le x \le 6 \\ 5 \le y \le 9 \end{cases} \Leftarrow 5\times 5 \le x\times y \le 6\times 9$

و بالتالي $\boxed{25 \le xy \le 54}$

الأعداد سالبة: ضرب متفاوتتين طرفا بطرف مع تغيير الترتيب:

a و b و m و n و c و d أعداد حقيقية **سالبة:**

$$a\times c \ge m\times n \ge b\times d \Leftarrow \begin{cases} a \le m \le b \\ c \le n \le d \end{cases}$$

* **مثال** x و y عددان حقيقيان بحيث :

$-3 \le x \le -1$ و $-5 \le y \le -2$ (أعداد سالبة) أطر xy

$-3\times(-5) \ge x\times y \ge -1\times(-2) \Leftarrow \begin{cases} -3 \le x \le -1 \\ -5 \le y \le -2 \end{cases}$

و بالتالي $\boxed{15 \ge xy \ge 2}$

ج- تأطير جداء عددين مختلفي الاشارة

***مثال:** a و b عددان حقيقيان بحيث :

$5 \le a \le 9$ و $-6 \le b \le -2$ (لاحظ b سالب), أطر ab .

السالب أولا $-6 \le b \le -2$

إذن: $-54 \le b\times a \le -10$

$5 \le a \le 9$

تمرين:

x و y و z و t أعداد حقيقية بحيث :

$2 \le t \le 5$ و $-4 \le z \le -1$ و $-5 \le y \le -2$ و $6 \le x \le 9$

أطر ما يلي : $7x$ و $-2z$ و $-y$ و xt و yz

xy و zt و x^2 و y^2 و $7x+yz$ و $-2z-xt$

5- تأطير مقلوب عدد حقيقي غير منعدم :

a و b و m أعداد حقيقية غير منعدمة و لها نفس الإشارة:

$$a \le m \le b \Leftrightarrow \frac{1}{b} \le \frac{1}{m} \le \frac{1}{a}$$

* **مثال** x عدد حقيقي بحيث: $-5 \le x \le -3$ أطر $\frac{1}{x}$

$$-5 \le x \le -3 \Leftrightarrow \frac{-1}{5} \le \frac{1}{x} \le \frac{-1}{3}$$

6) - تأطير خارج عددين :

a و b عددان حقيقيان .

لتأطير الخارج $\frac{a}{b}$ يكفي أن نؤطر الجداء $a\times\frac{1}{b}$

* **مثال** x و y عددان حقيقيان بحيث :

$-5 \le x \le -3$ و $5 \le y \le 7$ أطر $\frac{y}{x}$

أولا نؤطر $\frac{1}{x}$ (ثم نؤطر الجداء $y\times\frac{1}{x}$)

لدينا $-5 \le x \le -3 \Leftrightarrow \frac{-1}{5} \le \frac{1}{x} \le \frac{-1}{3}$

لنؤطر الجداء $y\times\frac{1}{x}$ (لاحظ أن $\frac{1}{x}$ سالب)

السالب أولا $\begin{cases} \frac{-1}{5} \le \frac{1}{x} \le \frac{-1}{3} \\ 5 \le y \le 7 \end{cases}$

$\frac{-1}{5}\times 5 \le \frac{1}{x}\times y \le \frac{-1}{3}\times 7$

تمرين:

x و y و z و t أعداد حقيقية بحيث :

$2 \le t \le 5$ و $-4 \le z \le -1$ و $-5 \le y \le -2$ و $6 \le x \le 9$

أطر ما يلي : $\frac{x}{t}$ و $\frac{z}{y}$ و $\frac{y}{t}$ و $\frac{x+t}{x-t}$ و $\frac{yz}{-2t+3x}$

تمرين:

علما أن : $2,6 \le \sqrt{7} \le 2,7$ و $1,7 \le \sqrt{3} \le 1,8$.

1) - أوجد تأطيرا للعدد $\sqrt{21}$

2) - أوجد تأطيرا للعدد : $3-2\sqrt{21}$

3) - أوجد تأطيرا للعدد : $\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

تمرين: b عدد حقيقي بحيث: $\frac{1}{4} < \frac{3}{-b+5} < \frac{1}{2}$

أوجد تأطيرا للعدد b.