الدرس 6 : الترتيب والعمليات

I - مقارنة عددين حقيقيين:

1) نشاط 1:

قارن كلا من العددين a و b في الحالات التالية:

1) $a=\frac{12}{7}$, $b=\frac{15}{7}$ 3) $a=\frac{5}{4}$, $b=\frac{11}{8}$

2) $a=\frac{15}{14}$, $b=\frac{-12}{7}$ 4) $a=\frac{6}{5}$, $b=\frac{6}{11}$

جواب:

1) لدينا: $15>12$ إذن: $\frac{15}{7}>\frac{12}{7}$

2) لدينا: $-\frac{12}{7}<0$ و $\frac{15}{14}>0$ إذن: $-\frac{12}{7}<\frac{15}{14}$

3) لدينا: $a=\frac{5}{4}=\frac{10}{8}$, لدينا: $10<11$

إذن: $\frac{10}{8}<\frac{11}{8}$ إذن: $\frac{5}{4}<\frac{11}{8}$

4) لدينا: $5<11$ إذن: $\frac{6}{5}>\frac{6}{11}$

2) خاصية 1:

a و b عددان حقيقيان

* إذا كان $a-b\leq 0$ فإن: $a\leq b$
* إذا كان $a-b\geq 0$ فإن: $a\geq b$

أي لمقارنة عددين حقيقيين، نحدد إشارة فرقهما.

3) أمثلة:

1) لنقارن $a=\frac{4}{35}$ و $b=\frac{2}{15}$

لدينا: $a-b=\frac{4}{35}-\frac{2}{15}=\frac{12-14}{105}=\frac{-2}{105}$

لدينا: $-\frac{2}{105}<0$ إذن $a-b<0$

إذن $\boxed{a<b}$

2) لنقارن العددين $2\sqrt{3}-4$ و $\sqrt{3}-\sqrt{5}$

لدينا: $(2\sqrt{3}-4)-(\sqrt{3}-\sqrt{5})=2\sqrt{3}-4-\sqrt{3}+\sqrt{5}$
$=\sqrt{3}+1$

بما أن: $\sqrt{3}+1>0$ فإن: $(2\sqrt{3}-4)-(\sqrt{3}-5)>0$

ومنه فإن: $\boxed{2\sqrt{3}-4>\sqrt{3}-5}$

4) تمرين تطبيقي

قارن كلا من العددين الآتيين:

1) $\frac{15}{14}$ و $\frac{12}{7}$

2) $7+\sqrt{2}$ و $-3\sqrt{2}-1$

3) $5\sqrt{3}+4$ و $\sqrt{3}-1$

الحل:

1) * $\frac{15}{14}-\frac{12}{7}=\frac{15-24}{14}=\frac{-9}{14}$

بما أن $-\frac{9}{14}<0$ فإن: $\frac{15}{14}-\frac{12}{7}<0$

ومنه فإن $\frac{15}{14}<\frac{12}{7}$

2) * $(7+\sqrt{2})-(-3\sqrt{2}-1)=7+\sqrt{2}+3\sqrt{2}+1$
$=4\sqrt{2}+8$

بما أن $4\sqrt{2}+8>0$ فإن: $(7+\sqrt{2})-(-3\sqrt{2}-1)>0$

ومنه فإن: $7+\sqrt{2}>-3\sqrt{2}-1$

3) $(5\sqrt{3}+4)-(\sqrt{3}-1)=5\sqrt{3}+4-\sqrt{3}+1$
$=4\sqrt{3}+5$

بما أن $4\sqrt{3}+5>0$ فإن: $(5\sqrt{3}+4)-(\sqrt{3}-1)>0$

ومنه فإن: $5\sqrt{3}+4>\sqrt{3}-1$

II - الترتيب والعمليات:

1) الترتيب والجمع:

أ- خاصية 1:

a و b و c أعداد حقيقية

* إذا كان $a\leq b$ فإن: $a+c\leq b+c$
* إذا كان $a+c\leq b+c$ فإن: $a\leq b$

* مثال:

a و b عددان حقيقيان بحيث: $a+4\leq b$

لنبين أن: $a+1\leq b-3$

لدينا $a+4\leq b$ إذن: $a+4-3\leq b-3$

أي $a+1\leq b-3$

ب- خاصية 2:

a و b و c و d أعداد حقيقية

إذا كان $\begin{cases} a\leq b \\ c\leq d \end{cases}$ فإن: $a+c\leq b+d$

* مثال:

a و b عددان حقيقيان بحيث: $b+4\leq\sqrt{2}$ و $a+3\leq 3$

بين أن $a+b+7\leq 3+\sqrt{2}$

نعلم أن $b+4\leq\sqrt{2}$ و $a+3\leq 3$

إذن: $b+4+a+3\leq\sqrt{2}+3$

ومنه فإن: $a+b+7\leq\sqrt{2}+3$

2) الترتيب والضرب

أ- نشاط ②:

a و b و c أعداد حقيقية بحيث: $a\le b$

① نفترض أن c موجب قارن ac و bc

② نفترض أن c سالب قارن ac و bc

الحل:

① لدينا: $ac-bc=c(a-b)$

بما أن: $a\le b$ فإن: $a-b\le 0$

و c موجب إذن: $c(a-b)\le 0$

إذن: $ac-bc\le 0$

وبالتالي $\boxed{ac\le bc}$

② لدينا: $ac-bc=c(a-b)$

لدينا: $a-b\le 0$ و بما أن c سالب

فإن: $c(a-b)\ge 0$ ومنه فإن: $ac-bc\ge 0$

وبالتالي فإن $\boxed{ac\ge bc}$

ب- خاصية ③:

a و b و c أعداد حقيقية

* إذا كان $a\le b$ و $c>0$ فإن: $a\times c\le b\times c$
* إذا كان $a\le b$ و $c<0$ فإن: $a\times c\ge b\times c$

* مثال: a و b عددان حقيقيان بحيث $a\ge\frac{4}{3}$ و $b\ge\sqrt3$

لنستنتج $3a$ و $-2b$

لدينا $a\ge\frac{4}{3}$ أي $3\times a\ge\frac{4}{3}\times 3$ إذن: $3a\ge 4$

ولدينا $b\ge\sqrt3$ أي $-2\times b\le -2\sqrt3$ إذن $-2b\le -2\sqrt3$

* ملاحظة: a و b عددان حقيقيان

إذا كان $a\le b$ فإن $-a\ge -b$

ج- خاصية ④:

a و b و c و d أعداد حقيقية موجبة

إذا كان $\begin{cases} a\le b \\ c\le d \end{cases}$ فإن: $a\times c\le b\times d$

* مثال: x و y عددان حقيقيان موجبان بحيث: $x<\sqrt3$ و $y<2\sqrt6$

لنبين أن $xy<6\sqrt2$

لدينا $\begin{cases} x<\sqrt3 \\ y<2\sqrt6 \end{cases}$ إذن

$x\times y<\sqrt3\times 2\sqrt6$

$x\times y<2\sqrt3\times\sqrt2\times\sqrt3$

$xy<2\times\sqrt2\times\sqrt3^2$

$\boxed{xy<6\sqrt2}$

د- تمرين تطبيقي:

x و y عددان حقيقيان بحيث: $x\ge 1$ و $y\ge 2$

بين أن: $(x-1)(y-2)\ge 0$

جواب:

لدينا: $x\ge 1$ إذن $x-1\ge 0$

و $y\ge 2$ إذن: $y-2\ge 0$

يعني أن: $(x-1)(y-2)\ge 0$

3) الترتيب والمقلوب:

أ- خاصية ⑤:

a و b عددان حقيقيان موجبان قطعا

إذا كان $a\le b$ فإن: $\frac{1}{a}\ge\frac{1}{b}$ والعكس صحيح

ب- أمثلة:

* لدينا: $2\le 4$ إذن: $\frac{1}{2}\ge\frac{1}{4}$
* لدينا $11>5$ إذن: $\frac{1}{11}<\frac{1}{5}$

ج- تمرين تطبيقي:

x عدد حقيقي بحيث $x\ge 1$ بين أن $\frac{-5}{x+2\sqrt3}\ge\frac{-5}{1+2\sqrt3}$

لدينا $x\ge 1$ إذن: $x+2\sqrt3\ge 1+2\sqrt3$

ومنه فإن: $\frac{1}{x+2\sqrt3}\le\frac{1}{1+2\sqrt3}$

وبالتالي فإن: $\frac{-5}{x+2\sqrt3}\ge\frac{-5}{1+2\sqrt3}$

4) خاصيات أخرى: المربع والجذر المربع.

أ- خاصية ⑥: المربع

a و b عددان حقيقيان موجبان

* إذا كان $a\le b$ فإن $a^2\le b^2$
* إذا كان $a^2\le b^2$ فإن $a\le b$

* ملاحظة: a و b عددان حقيقيان سالبان

إذا كان $a\le b$ فإن $a^2\ge b^2$

* أمثلة:

* لنقارن $2\sqrt2$ و 3

لدينا $\begin{cases} (2\sqrt2)^2=4\times 2=8 \\ 3^2=9 \end{cases}$ بما أن: $8<9$ إذن $(2\sqrt2)^2<3^2$

أي أن $\boxed{2\sqrt2<3}$

* لنقارن $-2\sqrt{3}$ و $-3\sqrt{2}$

لدينا $\begin{cases}(2\sqrt{5})^2=4\times5=20\\(3\sqrt{2})^2=9\times2=18\end{cases}$ فإن: $(2\sqrt{5})^2 > (3\sqrt{2})^2$ بما أن $18<20$

إذن: $2\sqrt{5} > 3\sqrt{2}$ وبالتالي $\boxed{-2\sqrt{5} < -3\sqrt{2}}$

ب- خاصية ⑦: الجذر المربع:

> a و b عددان حقيقيان موجبان.
> * إذا كان $a \leqslant b$ فإن: $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$
> * إذا كان $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$ فإن: $a \leqslant b$

ج- تمرين تطبيقي:

① قارن $3\sqrt{3}$ و $4\sqrt{2}$ ثم $-\sqrt{91}$ و $-6\sqrt{3}$

② قارن العددين $\sqrt{5}+4$ و $\sqrt{3}+4$

* جواب:

① لدينا: $\begin{cases}(3\sqrt{3})^2=9\times3=27\\(4\sqrt{2})^2=16\times2=32\end{cases}$ فإن: $(3\sqrt{3})^2 < (4\sqrt{2})^2$ بما أن $27<32$

إذن: $\boxed{3\sqrt{3} < 4\sqrt{2}}$

* لدينا: $\begin{cases}\sqrt{91}^2=91\\(6\sqrt{3})^2=36\times3=108\end{cases}$ بما أن $91<108$ فإن: $\sqrt{91}^2 < (6\sqrt{3})^2$

إذن: $\boxed{\sqrt{91} < 6\sqrt{3}}$

وبالتالي: $-\sqrt{91} > -6\sqrt{3}$

② لدينا: $\begin{cases}\sqrt{3}^2=3\\\sqrt{5}^2=5\end{cases}$ إذن: $\sqrt{3}^2 < \sqrt{5}^2$

$\sqrt{3} < \sqrt{5}$

وبالتالي: $\sqrt{3}+4 < \sqrt{5}+4$

ثالثا- التأطير:

1) تأطير مجموع عددين:

* خاصية ⑧:

> نعتبر جميع الأعداد حقيقية
> إذا كان $\begin{cases}a \leqslant x \leqslant b\\c \leqslant y \leqslant d\end{cases}$ فإن: $\boxed{a+c \leqslant x+y \leqslant b+d}$

* مثال: x و y عددان حقيقيان بحيث: $2 \leqslant x \leqslant 5$ و $-3 \leqslant y \leqslant -1$ أطر $x+y$

لدينا $\begin{cases}2 \leqslant x \leqslant 5\\-3 \leqslant y \leqslant -1\end{cases}$ إذن $2+(-3) \leqslant x+y \leqslant 5+(-1)$

$\boxed{-1 \leqslant x+y \leqslant 4}$

2) تأطير مقابل عدد حقيقي:

> * خاصية ⑨: x عدد حقيقي بحيث $a \leqslant x \leqslant b$
> لدينا: $\boxed{-b \leqslant -x \leqslant -a}$

* مثال: $-4 \leqslant x \leqslant 3$ أطر $-x$

لدينا: $-3 \leqslant -x \leqslant 4$

3) تأطير فرق:

* خاصية ⑩:

> نعتبر جميع الأعداد حقيقية
> إذا كان $\begin{cases}a \leqslant x \leqslant b\\c \leqslant y \leqslant d\end{cases}$ فإن: $\boxed{a-d \leqslant x-y \leqslant b-c}$

* ملاحظة هامة:

لدينا $a-b=a+(-b)$

إذن لتأطير $a-b$ نؤطر a و $-b$ ثم نطبق الخاصية ⑧ (تأطير المجموع)

* مثال: x و y عددان حقيقيان بحيث:

$3 \leqslant x \leqslant 8$ و $-4 \leqslant y \leqslant 2$

لنؤطر $x-y$

* لدينا: $-4 \leqslant y \leqslant 2$ إذن: $-2 \leqslant -y \leqslant 4$

لدينا $\begin{cases}3 \leqslant x \leqslant 8\\-2 \leqslant -y \leqslant 4\end{cases}$ إذن: $3+(-2) \leqslant x+(-y) \leqslant 8+4$

$\boxed{1 \leqslant x-y \leqslant 12}$

4) تأطير جداء عددين:

* خاصية ⑪:

> نعتبر جميع الأعداد الحقيقية موجبة
> إذا كان $\begin{cases}a \leqslant x \leqslant b\\c \leqslant y \leqslant d\end{cases}$ فإن: $\boxed{a\times c \leqslant x\times y \leqslant b\times d}$

* أمثلة: حالة ①: جميع الأعداد الحقيقية موجبة

$3 \leqslant x \leqslant 7$ و $1 \leqslant y \leqslant 4$

لنؤطر xy

لدينا: $\begin{cases}3 \leqslant x \leqslant 7\\1 \leqslant y \leqslant 4\end{cases}$ إذن: $3\times1 \leqslant x\times y \leqslant 7\times4$

$\boxed{3 \leqslant xy \leqslant 28}$

* حالة ②: x موجب و y عدد سالب

$4 \leqslant x \leqslant 8$ و $-5 \leqslant y \leqslant -2$ أطر xy

أولا يجب أن تكون الأعداد المؤطرة لـ x و y موجبة

لدينا $-5 \leqslant y \leqslant -2$ إذن: $2 \leqslant -y \leqslant 5$

لدينا $\begin{cases}4 \leqslant x \leqslant 8\\2 \leqslant -y \leqslant 5\end{cases}$ لاحظ أن جميع الأعداد المؤطرة لـ x و $-y$ موجبة

إذن: $4\times2 \leqslant x\times(-y) \leqslant 8\times5$

$8 \leqslant -xy \leqslant 40$

لكن مطلوب هنا أن نؤطر xy وليس $-xy$

إذن نستعمل ضرب في -1 (نغير الإشارة)

لدينا: $8 \leqslant -xy \leqslant 40$ إذن: $\boxed{-40 \leqslant xy \leqslant -8}$

5) تأطير مقلوب:

* خاصية ⑫: x و a و b أعداد حقيقية غير منعدمة

وحيث: $a \leq x \leq b$

لدينا: $\boxed{\frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}}$

* مثال: لدينا $2 \leq x \leq 4$ إذن: $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$

6) تأطير خارج عددين

* خاصية ⑬: نعتبر جميع الأعداد الحقيقية موجبة

إذا كان $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ وحيث: $y \neq 0$ و $c \neq 0$ و $d \neq 0$

فإن: $\boxed{\frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}}$

* ملاحظة هامة: لدينا: $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$

إذن لتأطير $\frac{a}{b}$، نؤطر أولا $\frac{1}{b}$ ثم نطبق الخاصية 11 (تأطير الجداء)

* أمثلة: حالة ①: جميع الأعداد موجبة

x و y عددان حقيقيان بحيث $6 \leq x \leq 10$ و $2 \leq y \leq 3$ أطر $\frac{x}{y}$

لدينا $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$ إذن لنؤطر أولا $\frac{1}{y}$

لدينا: $2 \leq y \leq 3$ إذن: $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$

لدينا: $\begin{cases} 6 \leq x \leq 10 \\ \frac{1}{3} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ إذن: $6 \times \frac{1}{3} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 10 \times \frac{1}{2}$

وبالتالي: $\boxed{2 \leq \frac{x}{y} \leq 5}$

* حالة ②: x موجب و y سالب

$6 \leq x \leq 10$ و $-3 \leq y \leq -2$ أطر $\frac{x}{y}$

لدينا $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$ إذن لنؤطر أولا $\frac{1}{y}$

لدينا: $-3 \leq y \leq -2$ إذن: $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq -\frac{1}{3}$

نحن نلاحظ أن الأعداد المؤطرة لـ $\frac{1}{y}$ سالبة إذن نحولها إلى أعداد موجبة

لدينا: $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq -\frac{1}{3}$ إذن: $\frac{1}{3} \leq -\frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$

لدينا: $\begin{cases} 6 \leq x \leq 10 \\ \frac{1}{3} \leq -\frac{1}{y} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ إذن: $6 \times \frac{1}{3} \leq x \times \left(-\frac{1}{y}\right) \leq 10 \times \frac{1}{2}$

$2 \leq -\frac{x}{y} \leq 5$

نحن طلب منا $\frac{x}{y}$ وليس $-\frac{x}{y}$ إذن نتخلص من الإشارة -

لدينا: $\boxed{-5 \leq \frac{x}{y} \leq -2}$

7) تمارين تطبيقية

* تمرين تطبيقي ①: ت 42 ص 55

$2 \leq a \leq 3$ و $-4 \leq b \leq -3$

* تأطير $a+b$

لدينا: $\begin{cases} 2 \leq a \leq 3 \\ -4 \leq b \leq -3 \end{cases}$ إذن: $2+(-4) \leq a+b \leq 3+(-3)$

$\boxed{-2 \leq a+b \leq 0}$

* تأطير $a-b$

لدينا: $-4 \leq b \leq -3$ إذن: $3 \leq -b \leq 4$

لدينا: $\begin{cases} 2 \leq a \leq 3 \\ 3 \leq -b \leq 4 \end{cases}$ إذن: $2+3 \leq a+(-b) \leq 3+4$

إذن $\boxed{5 \leq a-b \leq 7}$

* تأطير ab

لدينا: $\begin{cases} 2 \leq a \leq 3 \\ 3 \leq -b \leq 4 \end{cases}$ إذن: $2 \times 3 \leq a \times (-b) \leq 3 \times 4$

$6 \leq -ab \leq 12$

وبالتالي: $\boxed{-12 \leq ab \leq -6}$

* تأطير $\frac{a}{b}$

لدينا: $-4 \leq b \leq -3$ إذن: $\cancel{3 \leq -b \leq 4}$

$-\frac{1}{3} \leq \frac{1}{b} \leq -\frac{1}{4}$

لدينا: $\begin{cases} 2 \leq a \leq 3 \\ \frac{1}{4} \leq -\frac{1}{b} \leq \frac{1}{3} \end{cases}$ إذن: $2 \times \frac{1}{4} \leq a \times \left(-\frac{1}{b}\right) \leq 3 \times \frac{1}{3}$

$\frac{1}{2} \leq -\frac{a}{b} \leq 1$

وبالتالي: $\boxed{-1 \leq \frac{a}{b} \leq -\frac{1}{2}}$

* تمرين تطبيقي ②: a و b و c أعداد حقيقية بحيث:

$6 \leq a \leq 8$ و $-4 \leq b \leq -2$ و $-3 \leq c \leq 5$

أطر a^2 ، b^2 ، $a+2b-4c$ ، $\frac{a+b}{a^2}$

← الحل:

* تأطير a^2

لدينا: $6 \leq a \leq 8$ إذن: $6^2 \leq a^2 \leq 8^2$

إذن: $\boxed{36 \leq a^2 \leq 64}$

* تأطير b^2

لدينا: $-4 \leq b \leq -2$ إذن: $(-2)^2 \leq b^2 \leq (-4)^2$

وبالتالي: $\boxed{4 \leq b^2 \leq 16}$

* تأطير $a+2b-4c$:

لدينا : $-4 \leq b \leq -2$ إذن : $-8 \leq 2b \leq -4$

لدينا : $-3 \leq c \leq 5$ إذن : $-20 \leq -4c \leq 12$

لدينا : $\begin{cases} 6 \leq a \leq 8 \\ -8 \leq 2b \leq -4 \\ -20 \leq -4c \leq 12 \end{cases}$ إذن : $6-8-20 \leq a+2b-4c \leq 8-4+12$

وبالتالي : $\boxed{-22 \leq a+2b-4c \leq 16}$

* تأطير $\dfrac{a+b}{b^2}$

لدينا ، $\begin{cases} 6 \leq a \leq 8 \\ -4 \leq b \leq -2 \end{cases}$ إذن ، $6+(-4) \leq a+b \leq 8+(-2)$

$2 \leq a+b \leq 6$

ولدينا : $4 \leq b^2 \leq 16$ إذن : $\dfrac{1}{16} \leq \dfrac{1}{b^2} \leq \dfrac{1}{4}$

لدينا : $\begin{cases} 2 \leq a+b \leq 6 \\ \dfrac{1}{16} \leq \dfrac{1}{b^2} \leq \dfrac{1}{4} \end{cases}$ إذن : $2 \times \dfrac{1}{16} \leq \dfrac{a+b}{b^2} \leq 6 \times \dfrac{1}{4}$

وبالتالي : $\boxed{\dfrac{1}{8} \leq \dfrac{a+b}{b^2} \leq \dfrac{3}{2}}$