سلسلة 1 للترتيب والعمليات

تمرين 1 :

قارن العددين في كل حالة :

a) $\frac{3}{2}$ و $\frac{4}{5}$

b) $\frac{3}{7}$ و $\frac{5}{7}$

c) $\frac{8}{3}$ و $\frac{8}{6}$

d) 3 و $\sqrt{8}$

e) 5 و $2\sqrt{5}$

f) $-\sqrt{3}$ و $-\sqrt{5}$

g) $\sqrt{11}$ و $2\sqrt{3}$

h) $5\sqrt{2}$ و $2\sqrt{5}$

i) $-6\sqrt{7}$ و $2\sqrt{7}$

j) $\sqrt{11}+\sqrt{10}$ و $2\sqrt{3}+\sqrt{10}$

k) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ و $1+\sqrt{6}$

l) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ و $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

تمرين 2 :

x و y عددان حقيقيان موجبان بحيث $x \leq y$ =)=

أتمم بآستعمال أحد الرمزين $\leq$ أو $\geq$:

$-7x \dots -7y$; $7x \dots 7y$; $y-x \dots 0$; $x-y \dots 0$

$\frac{1}{x} \dots \frac{1}{y}$; $x^2 \dots y^2$; $x-3 \dots y-3$; $x+3 \dots y+3$

تمرين 3 :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $2 \leq x \leq 5$ و $1 \leq y \leq 4$

أطر : $x+y$ و $x+3$ و $3x$ و $-5y$ و $3x-5y$ و xy و $\frac{1}{xy}$ و x^2-y

تمرين 4 :

a و b و c أعداد حقيقية بحيث : $2 \leq a \leq 5$ و $1 \leq b \leq 4$ و $-5 \leq c \leq -3$

أتمم التأطيرات التالية :

$\dots \leq a+b \leq \cdots$

$\dots \leq b+c \leq \cdots$

$\dots \leq a-c \leq \cdots$

$\dots \leq 3a \leq \cdots$

$\dots \leq 3c \leq \cdots$

$\dots \leq \frac{1}{a} \leq \cdots$

$\dots \leq \frac{1}{c} \leq \cdots$

$\dots \leq -3a \leq \cdots$

$\dots \leq -a \leq \cdots$

$\dots \leq a \times b \leq \cdots$

$\dots \leq a^2 \leq \cdots$

$\dots \leq c^2 \leq \cdots$

حل سلسلة 1 للترتيب والعمليات

تمرين 1 :

قارن العددين في كل حالة :

a) لنقارن $\frac{3}{2}$ و $\frac{4}{5}$: لدينا $\frac{4}{5}-\frac{3}{2}=\frac{4\times2-3\times5}{5\times2}=\frac{8-15}{10}=\frac{-7}{10}$

وبما أن $\frac{-7}{10}<0$ إذن $\frac{4}{5}-\frac{3}{2}<0$ وبالتالي $\frac{4}{5}<\frac{3}{2}$

b) لنقارن $\frac{3}{7}$ و $\frac{5}{7}$: لدينا $\frac{3}{7}=3\times\frac{1}{7}$ و $\frac{5}{7}=5\times\frac{1}{7}$

وبما أن $3<5$ إذن $3\times\frac{1}{7}<5\times\frac{1}{7}$ وبالتالي $\frac{3}{7}<\frac{5}{7}$

c) لنقارن $\frac{8}{3}$ و $\frac{8}{6}$: لدينا $\frac{8}{3}=8\times\frac{1}{3}$ و $\frac{8}{6}=8\times\frac{1}{6}$

وبما أن $3<6$ إذن $\frac{1}{3}>\frac{1}{6}$ إذن $8\times\frac{1}{3}>8\times\frac{1}{6}$ وبالتالي $\frac{8}{3}<\frac{8}{6}$

d) لنقارن 3 و $\sqrt{8}$: لدينا $3^2=9$ و $\sqrt{8}^2=8$

وبما أن $8<9$ إذن $\sqrt{8}^2<3^2$ وبالتالي $\sqrt{8}<3$

e) لنقارن 5 و $2\sqrt{5}$: لدينا $5^2=25$ و $(2\sqrt{5})^2=4\times5=20$

وبما أن $20<25$ إذن $(2\sqrt{5})^2<5^2$ وبالتالي $2\sqrt{5}<5$

f) لنقارن $-\sqrt{5}$ و $-\sqrt{3}$: لدينا $3<5$ إذن $\sqrt{3}<\sqrt{5}$ وبالتالي $-\sqrt{3}>-\sqrt{5}$

g) لنقارن $\sqrt{11}$ و $2\sqrt{3}$: لدينا $\sqrt{11}^2=11$ و $(2\sqrt{3})^2=4\times3=12$

وبما أن $11<12$ إذن $\sqrt{11}^2<(2\sqrt{3})^2$ وبالتالي $\sqrt{11}<2\sqrt{3}$

h) لنقارن $5\sqrt{2}$ و $2\sqrt{5}$: لدينا $(5\sqrt{2})^2=25\times2=50$ و $(2\sqrt{5})^2=20$

وبما أن $20<50$ إذن $(2\sqrt{5})^2<(5\sqrt{2})^2$ وبالتالي $2\sqrt{5}<5\sqrt{2}$

i) لنقارن $-6\sqrt{7}$ و $2\sqrt{7}$: بما أن السالب أصغر من الموجب إذن $-6\sqrt{7}<2\sqrt{7}$

j) لنقارن $\sqrt{11}+\sqrt{10}$ و $2\sqrt{3}+\sqrt{10}$: في هذه الحالة يكفي أن نقارن $\sqrt{11}$ و $2\sqrt{3}$

لدينا $\sqrt{11}<2\sqrt{3}$ وبالتالي $\sqrt{11}+\sqrt{10}<2\sqrt{3}+\sqrt{10}$

k) لنقارن $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ و $1+\sqrt{6}$:

لدينا $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=\sqrt{2}^2+2\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\sqrt{3}^2=2+2\sqrt{6}+3=5+2\sqrt{6}$

لدينا $(1+\sqrt{6})^2=1^2+2\times1\times\sqrt{6}+\sqrt{6}^2=1+2\sqrt{6}+6=7+2\sqrt{6}$

وبما أن $5 < 7$ إذن $5+2\sqrt{6} < 7+2\sqrt{6}$ يعني أن $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 < \left(1+\sqrt{6}\right)^2$

وبالتالي $\sqrt{2}+\sqrt{3} < 1+\sqrt{6}$

I) لنقارن $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ و $\sqrt{2}+\sqrt{6}$:

لدينا $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2 = \sqrt{3}^2 + 2\times\sqrt{3}\times\sqrt{5} + \sqrt{5}^2 = 3+2\sqrt{15}+5 = 8+2\sqrt{15}$

لدينا $\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2 = \sqrt{2}^2 + 2\times\sqrt{2}\times\sqrt{6} + \sqrt{6}^2 = 2+2\sqrt{12}+6 = 8+2\sqrt{12}$

وبما أن $\sqrt{12} < \sqrt{15}$ إذن $8+\sqrt{12} < 8+\sqrt{15}$

يعني أن $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 < \left(1+\sqrt{6}\right)^2$ وبالتالي $\sqrt{2}+\sqrt{3} < 1+\sqrt{6}$

تمرين 2 :

x و y عددان حقيقيان بحيث $x \leq y$

أتمم بآستعمال أحد الرمزين $\leq$ أو $\geq$:

$-7x \geq -7y$; $7x \leq 7y$; $y-x \geq 0$; $x-y \leq 0$

$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$; $x^2 \leq y^2$; $x-3 \leq y-3$; $x+3 \leq y+3$

تمرين 3 :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $2 \leq x \leq 5$ و $1 \leq y \leq 4$

أطر : $x+y$ و $x+3$ و $3x$ و $-5y$ و $3x-5y$ و xy و $\frac{1}{xy}$ و x^2-y

تأطير $x+y$: لدينا $\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ 1 \leq y \leq 4 \end{cases}$ إذن $2+1 \leq x+y \leq 5+4$ إذن $3 \leq x+y \leq 9$

تأطير $x+3$: لدينا $\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ 2+3 \leq x+3 \leq 5+3 \end{cases}$ وبالتالي $5 \leq x+3 \leq 8$

تأطير $3x$: لدينا $\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ 3\times 2 \leq 3\times x \leq 3\times 5 \end{cases}$ وبالتالي $6 \leq 3x \leq 15$

تأطير $-5y$: لدينا $\begin{cases} 1 \leq y \leq 4 \\ 5\times 1 \leq 5\times y \leq 5\times 4 \end{cases}$ إذن $5 \leq 5y \leq 20$ إذن $-20 \leq -5y \leq -5$

تأطير $3x-5y$: لدينا $\begin{cases} 6 \leq 3x \leq 15 \\ -20 \leq -5y \leq -5 \end{cases}$ إذن $6-20 \leq 3x-5y \leq 15-5$

وبالتالي $-14 \leq 3x-5y \leq 10$

تأطير xy : لدينا $\begin{cases}2 \le x \le 5 \\ 1 \le y \le 4\end{cases}$ إذن $2 \times 1 \le xy \le 5 \times 4$ إذن $2 \le xy \le 20$

تأطير $\frac{1}{xy}$: لدينا $\begin{cases}2 \le xy \le 20 \\ \frac{1}{20} \le \frac{1}{xy} \le \frac{1}{2}\end{cases}$ وبالتالي $\frac{1}{20} \le \frac{1}{xy} \le \frac{1}{2}$

تأطير $x^2 - y$: لدينا $\begin{cases}2 \le x \le 5 \\ 2^2 \le x^2 \le 5^2\end{cases}$ ولدينا $\begin{cases}1 \le y \le 4 \\ -4 \le -y \le -1\end{cases}$

إذن $\begin{cases}4 \le x^2 \le 25 \\ -4 \le -y \le -1\end{cases}$ إذن $4 - 4 \le x^2 - y \le 25 - 1$

وبالتالي $0 \le x^2 - y \le 24$

تمرين 4 :

a و b و c أعداد حقيقية بحيث : $2 \le a \le 5$ و $1 \le b \le 4$ و $-5 \le c \le -3$

أتمم التأطيرات التالية :

$2 + 1 \le a + b \le 5 + 4$

$1 - 5 \le b + c \le 4 - 3$

$2 + 3 \le a - c \le 5 + 5$

$3 \times 2 \le 3a \le 3 \times 5$

$3 \times (-5) \le 3c \le 3 \times (-3)$

$\frac{1}{5} \le \frac{1}{a} \le \frac{1}{2}$

$\frac{1}{-3} \le \frac{1}{c} \le \frac{1}{-5}$

$-3 \times 5 \le -3a \le -3 \times 2$

$-5 \le -a \le -2$

$2 \times 1 \le a \times b \le 5 \times 4$

$2^2 \le a^2 \le 5^2$

$(-3)^2 \le c^2 \le (-5)^2$

سلسلة 2 للترتيب والعمليات

تمرين 1 :

1) قارن a و b في كل حالة :

أ- $a-b=-\sqrt{5}$

ب- $a=11-3\sqrt{5}$ و $b=8-5\sqrt{3}$

2) أثبت أن : $2\sqrt{5}<5$ ؟

3) رتب الأعداد الحقيقية التالية ترتيباً تزايدياً : 6 و $4\sqrt{2}$ و $2\sqrt{5}$ و $3\sqrt{3}$

4) حدد إشارة العدد $3\sqrt{2}-2\sqrt{5}$ معللاً جوابك ؟

5) استنتج أن : $\sqrt{10-2\sqrt{5}}<\sqrt{10-3\sqrt{2}}$ ؟

تمرين 2 :

x و y و z أعداد حقيقية بحيث : $3\leq x\leq 5$ و $1\leq y\leq 2$ و $-4\leq z\leq -2$

أجب بصحيح أو خطأ عن الإقتراحات التالية :

1) تأطير $x+y$ هو $3+1\leq x+y\leq 5+2$: ☐

2) تأطير $x-y$ هو $3-1\leq x-y\leq 5-2$: ☐

3) تأطير $2x$ هو $2\times 3\leq 2x\leq 2\times 5$: ☐

4) تأطير $-2x$ هو $-2\times 3\leq -2x\leq -2\times 5$: ☐

5) تأطير $x\times y$ هو $3\times 1\leq x\times y\leq 5\times 2$: ☐

6) تأطير $y\times z$ هو $1\times(-4)\leq y\times z\leq 2\times(-2)$: ☐

7) تأطير x^2 هو $3^2\leq x^2\leq 5^2$: ☐

8) تأطير z^2 هو $(-4)^2\leq z^2\leq (-2)^2$: ☐

9) تأطير $\frac{1}{x}$ هو $\frac{1}{5}\leq\frac{1}{x}\leq\frac{1}{3}$: ☐

10) تأطير $\frac{1}{z}$ هو $\frac{1}{-2}\leq\frac{1}{z}\leq\frac{1}{-4}$: ☐

11) تأطير $\frac{x}{y}$ هو $3\times\frac{1}{2}\leq\frac{x}{y}\leq 5\times\frac{1}{1}$: ☐

12) تأطير $\frac{x}{z}$ هو $3\times\frac{1}{-2}\leq\frac{x}{z}\leq 5\times\frac{1}{-4}$: ☐

حل سلسلة 2 للترتيب والعمليات

تمرين 1 :

1) قارن a و b في كل حالة :

أ- $a-b=-\sqrt{5}$: بما أن $-\sqrt{5}<0$ إذن $a-b<0$ وبالتالي $a<b$

ب- $a=11-3\sqrt{5}$ و $b=8-5\sqrt{3}$: لنقارن أولاً $3\sqrt{5}$ و $5\sqrt{3}$

لدينا $\begin{cases}(3\sqrt{5})^2=9\times5=45\\(5\sqrt{3})^2=25\times3=75\end{cases}$ وبما أن $45<75$ إذن $(3\sqrt{5})^2<(5\sqrt{3})^2$

إذن $3\sqrt{5}<5\sqrt{3}$ يعني أن $-3\sqrt{5}>-5\sqrt{3}$ إذن لدينا $\begin{cases}8<11\\-5\sqrt{3}<-3\sqrt{5}\end{cases}$

وبالتالي $8-5\sqrt{3}<11-3\sqrt{5}$

2) أثبت أن : $2\sqrt{5}<5$ ؟

لدينا $\begin{cases}5^2=5\times5=25\\(2\sqrt{5})^2=4\times5=20\end{cases}$ وبما أن $20<25$ إذن $(2\sqrt{5})^2<5^2$

وبالتالي $2\sqrt{5}<5$

3) **رتب الأعداد الحقيقية التالية ترتيباً تزايدياً : 6 و $4\sqrt{2}$ و $2\sqrt{5}$ و $3\sqrt{3}$:**

لمقارنة هذه الأعداد يجب أن نتخلص من الجذر وذلك بحساب مربعاتها

لدينا $\begin{cases}(4\sqrt{2})^2=16\times2=32\\(2\sqrt{5})^2=4\times5=20\\(3\sqrt{3})^2=9\times3=27\\6^2=6\times6=36\end{cases}$ إذن $\begin{cases}20<27<32<36\\(2\sqrt{5})^2<(3\sqrt{3})^2<(4\sqrt{2})^2<6^2\\2\sqrt{5}<3\sqrt{3}<4\sqrt{2}<6\end{cases}$ وبالتالي

4) حدد إشارة العدد $3\sqrt{2}-2\sqrt{5}$ معللاً جوابك ؟

لدينا $\begin{cases}(3\sqrt{2})^2=9\times2=18\\(2\sqrt{5})^2=4\times5=20\end{cases}$ وبما أن $18<20$ إذن $(3\sqrt{2})^2<(2\sqrt{5})^2$

إذن $3\sqrt{2}<2\sqrt{5}$ يعني أن $3\sqrt{2}-2\sqrt{5}<0$ وبالتالي إشارة العدد سالبة

5) استنتج أن : $\sqrt{10-2\sqrt{5}} < \sqrt{10-3\sqrt{2}}$ ؟

لدينا $\begin{cases} 3\sqrt{2} < 2\sqrt{5} \\ -3\sqrt{2} > -2\sqrt{5} \end{cases}$ إذن $\begin{cases} 10-3\sqrt{2} > 10-2\sqrt{5} \\ \sqrt{10-3\sqrt{2}} > \sqrt{10-2\sqrt{5}} \end{cases}$ وبالتالي

تمرين 2 :

x و y و z أعداد حقيقية بحيث : $3 \leq x \leq 5$ و $1 \leq y \leq 2$ و $-4 \leq z \leq -2$

أجب بصحيح أو خطأ عن الإقتراحات التالية :

1) تأطير $x+y$ هو $3+1 \leq x+y \leq 5+2$: صحيح

2) تأطير $x-y$ هو $3-1 \leq x-y \leq 5-2$: خطأ

3) تأطير $2x$ هو $2 \times 3 \leq 2x \leq 2 \times 5$: صحيح

4) تأطير $-2x$ هو $-2 \times 3 \leq -2x \leq -2 \times 5$: خطأ

5) تأطير $x \times y$ هو $3 \times 1 \leq x \times y \leq 5 \times 2$: صحيح

6) تأطير $y \times z$ هو $1 \times (-4) \leq y \times z \leq 2 \times (-2)$: خطأ

7) تأطير x^2 هو $3^2 \leq x^2 \leq 5^2$: صحيح

8) تأطير z^2 هو $(-4)^2 \leq z^2 \leq (-2)^2$: خطأ

9) تأطير $\frac{1}{x}$ هو $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{3}$: صحيح

10) تأطير $\frac{1}{z}$ هو $\frac{1}{-2} \leq \frac{1}{z} \leq \frac{1}{-4}$: صحيح

11) تأطير $\frac{x}{y}$ هو $3 \times \frac{1}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 5 \times \frac{1}{1}$: صحيح

12) تأطير $\frac{x}{z}$ هو $3 \times \frac{1}{-2} \leq \frac{x}{z} \leq 5 \times \frac{1}{-4}$: صحيح