

الترتيب و العمليات - حلول

تمرين 1

معطيات : x و y عدنان حقيقيان حيث : $x \leq y$

<p>② لنقارن $\frac{7x-11y}{2}$ و $-\frac{2y+8x}{5}$</p>	<p>① لنقارن $3x-7y$ و $-5y+x$</p>
<p>لدينا :</p> $\frac{7x-11y}{2} + \frac{2y+8x}{5} = \frac{5(7x-11y)+2(2y+8x)}{10}$ $= \frac{35x-55y+4y+16x}{10} = \frac{51x-51y}{10} = \frac{51(x-y)}{10}$ <p>و بما أن $x \leq y$ فإن $x-y \leq 0$ منه $\frac{51(x-y)}{2} \leq 0$</p> <p>بالتالي : $\frac{7x-11y}{2} \leq -\frac{2y+8x}{5}$</p>	<p>لدينا :</p> $(-5y+x) - (3x-7y) = -5y+x-3x+7y$ $= -2x+2y = 2(-x+y) = 2(y-x)$ <p>و بما أن $x \leq y$ فإن $x-y \leq 0$ منه $2(x-y) \leq 0$</p> <p>بالتالي : $-5y+x \leq 3x-7y$</p>

تمرين 2

معطيات

$-9 \leq k \leq -2$	$-10 \leq t \leq 1$	$2 \leq z \leq 5$	$-7 \leq y \leq -4$	$3 \leq x \leq 6$			
لنؤطر $6t+2y$	لنؤطر $x-y$			لنؤطر $x+y$			
<p>لدينا $-10 \leq t \leq 1$ منه : $-60 \leq 6t \leq 6$</p> <p>لدينا $-7 \leq y \leq -4$ منه : $-14 \leq 2y \leq -8$</p> <p>إذن : $-60 + (-14) \leq 6t + 2y \leq 6 + (-8)$</p> <p>بالتالي : $-74 \leq 6t + 2y \leq -2$</p>	<p>لدينا : $x-y = x+(-y)$</p> <p>و لدينا $-7 \leq y \leq -4$ منه : $4 \leq -y \leq 7$</p> <p>و لدينا : $3 \leq x \leq 6$</p> <p>إذن : $3+4 \leq x+(-y) \leq 6+7$</p> <p>بالتالي : $7 \leq x-y \leq 13$</p>			<p>لدينا : $3 \leq x \leq 6$ و $-7 \leq y \leq -4$</p> <p>إذن : $-7+3 \leq x+y \leq -4+6$</p> <p>إذن : $-4 \leq x+y \leq 2$</p>			
لنؤطر $-y+5x$	لنؤطر $z-x$			لنؤطر $z+t$			
<p>لدينا $-7 \leq y \leq -4$ منه : $4 \leq -y \leq 7$</p> <p>لدينا $3 \leq x \leq 6$ منه : $15 \leq 5x \leq 30$</p> <p>إذن : $4+15 \leq -y+5x \leq 7+30$</p> <p>بالتالي : $19 \leq -y+5x \leq 37$</p>	<p>لدينا : $z-x = z+(-x)$</p> <p>و لدينا $3 \leq x \leq 6$ منه : $-6 \leq -x \leq -3$</p> <p>و لدينا : $2 \leq z \leq 5$</p> <p>إذن : $2+(-6) \leq z+(-x) \leq 5+(-3)$</p> <p>بالتالي : $-4 \leq z-x \leq 2$</p>			<p>لدينا : $2 \leq z \leq 5$ و $-10 \leq t \leq 1$</p> <p>إذن : $2+(-10) \leq z+t \leq 5+1$</p> <p>إذن : $-8 \leq z+t \leq 6$</p>			
لنؤطر $-4y-16$	لنؤطر x^2			لنؤطر $5x$			
<p>لدينا : $-4y-16 = -4y+(-16)$</p> <p>لدينا $-7 \leq y \leq -4$ منه : $16 \leq -4y \leq 28$</p> <p>منه : $16+(-16) \leq -4y+(-16) \leq 28+(-16)$</p> <p>بالتالي : $0 \leq -4y-16 \leq 12$</p>	<p>لدينا $3 \leq x \leq 6$ منه : $9 \leq x^2 \leq 36$</p>			<p>لدينا $3 \leq x \leq 6$ منه : $15 \leq 5x \leq 30$</p>			
لنؤطر $x+y-t+6z+13$			لنؤطر y^2				
<p>لدينا : $x+y-t+6z+13 = x+y+(-t)+6z+13$</p> <p>لدينا : $3 \leq x \leq 6$</p> <p>و : $-7 \leq y \leq -4$</p> <p>و لدينا : $-10 \leq t \leq 1$ منه : $-1 \leq -t \leq 10$</p> <p>و لدينا : $2 \leq z \leq 5$ منه : $12 \leq 6z \leq 30$</p> <p>نجمع المتفاوتات فنجد :</p> <p>$20 \leq x+y+(-t)+6z+13 \leq 55$</p>			<p>لدينا $-7 \leq y \leq -4$ منه : $4 \leq -y \leq 7$</p> <p>منه : $16 \leq (-y)^2 \leq 49$</p> <p>بالتالي : $16 \leq y^2 \leq 49$</p>			<p>لدينا $-10 \leq t \leq 1$ منه : $-4 \leq -4t \leq 40$</p>	
لنؤطر $x+y-t+6z+13$			لنؤطر $-4t$				
<p>لدينا : $x+y-t+6z+13 = x+y+(-t)+6z+13$</p> <p>لدينا : $3 \leq x \leq 6$</p> <p>و : $-7 \leq y \leq -4$</p> <p>و لدينا : $-10 \leq t \leq 1$ منه : $-1 \leq -t \leq 10$</p> <p>و لدينا : $2 \leq z \leq 5$ منه : $12 \leq 6z \leq 30$</p> <p>نجمع المتفاوتات فنجد :</p> <p>$20 \leq x+y+(-t)+6z+13 \leq 55$</p>			<p>لدينا $-10 \leq t \leq 1$ منه : $-4 \leq -4t \leq 40$</p>				
لنؤطر $x+y-t+6z+13$			لنؤطر $-4t$				
<p>لدينا : $x+y-t+6z+13 = x+y+(-t)+6z+13$</p> <p>لدينا : $3 \leq x \leq 6$</p> <p>و : $-7 \leq y \leq -4$</p> <p>و لدينا : $-10 \leq t \leq 1$ منه : $-1 \leq -t \leq 10$</p> <p>و لدينا : $2 \leq z \leq 5$ منه : $12 \leq 6z \leq 30$</p> <p>نجمع المتفاوتات فنجد :</p> <p>$20 \leq x+y+(-t)+6z+13 \leq 55$</p>			<p>لدينا $-10 \leq t \leq 1$ منه : $-4 \leq -4t \leq 40$</p>				

لنؤطر yk	لنؤطر xz	لنؤطر t^2
لدينا : $3 \leq x \leq 6$ و $-7 \leq y \leq -4$ منه : $4 \leq -y \leq 7$ منه : $3 \times 4 \leq x \times (-y) \leq 6 \times 7$ منه : $12 \leq -xy \leq 42$ بالتالي : $-42 \leq xy \leq -12$	لدينا : $3 \leq x \leq 6$ و $2 \leq z \leq 5$ منه : $6 \leq xz \leq 30$	لدينا $-10 \leq t \leq 1$ منه : $-10 \leq t \leq 0$ أو $0 \leq t \leq 1$ $0 \leq -t \leq 10$ أو $0 \leq t \leq 1$ منه $0 \leq (-t)^2 \leq 100$ أو $0 \leq t^2 \leq 100$ منه $0 \leq t^2 \leq 100$ أو $0 \leq t^2 \leq 100$ بالتالي : $0 \leq t^2 \leq 100$
🔍 ← بما أن قاعدة تأطير جداء	🔍 ← لاحظ أننا استعملنا نفس تقنية تأطير xy ، لكننا استفدنا من كون : $(-x) \times (-y) = xy$	🔍 ← صعوبة هذا التأطير تكمن في كون العدد t مؤطر بين عدد سالب و آخر موجب ، مما يعيق استعمال قاعدة تأطير المربع مباشرة أو حتى تأطير $-t$ ، لذلك نستعمل الحالات : فنؤطر t في الحالة الموجبة ثم في الحالة السالبة ثم نستنتج التأطير من النتائج المحصل عليها.
🔍 ← بما أن قاعدة تأطير جداء (سالب) ، مما سمح لنا بتأطير الجداء $-xy$ ، و باستعمال قاعدة تأطير المقابل نستطيع تأطير xy .	لدينا : $z = z \times \frac{1}{x}$ لدينا : $3 \leq x \leq 6$ منه : $\frac{1}{6} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{3}$ ولدينا : $2 \leq z \leq 5$ منه : $2 \times \frac{1}{6} \leq z \times \frac{1}{x} \leq 5 \times \frac{1}{3}$ بالتالي : $\frac{2}{6} \leq \frac{z}{x} \leq \frac{5}{3}$ أو أيضا : $\frac{1}{3} \leq \frac{z}{x} \leq \frac{5}{3}$	🔍 ← تذكر أننا نؤطر مستعملين قواعد التأطير و ليس بتطبيق تعبير المجهول على الأعداد.
لنؤطر $\frac{y}{z}$	لدينا : $\frac{z}{x} = z \times \frac{1}{x}$ لدينا : $3 \leq x \leq 6$ منه : $\frac{1}{6} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{3}$ ولدينا : $2 \leq z \leq 5$ منه : $2 \times \frac{1}{6} \leq z \times \frac{1}{x} \leq 5 \times \frac{1}{3}$ بالتالي : $\frac{2}{6} \leq \frac{z}{x} \leq \frac{5}{3}$ أو أيضا : $\frac{1}{3} \leq \frac{z}{x} \leq \frac{5}{3}$	لنؤطر $\frac{x-t}{y+10z}$
لدينا : $\frac{y}{z} = y \times \frac{1}{z}$ لدينا : $-7 \leq y \leq -4$ منه : $4 \leq -y \leq 7$ ولدينا : $2 \leq z \leq 5$ منه : $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{z} \leq \frac{1}{2}$ منه : $4 \times \frac{1}{5} \leq (-y) \times \frac{1}{z} \leq 7 \times \frac{1}{2}$ أي : $\frac{4}{5} \leq \frac{-y}{z} \leq \frac{7}{2}$ بالتالي : $-\frac{7}{2} \leq \frac{y}{z} \leq -\frac{4}{5}$	لدينا : $\frac{y^2+5}{t-10} = (y^2+5) \times \frac{1}{t+(-10)}$ لدينا : $-7 \leq y \leq -4$ منه : $4 \leq -y \leq 7$ منه : $16 \leq y^2 \leq 49$ أي : $16 \leq (-y)^2 \leq 49$ منه : $21 \leq y^2+5 \leq 54$ لدينا : $-10 \leq t \leq 1$ منه : $-20 \leq t-10 \leq -9$ منه : $9 \leq -(t-10) \leq 20$ منه : $\frac{1}{20} \leq \frac{1}{-(t-10)} \leq \frac{1}{9}$ إذن : $21 \times \frac{1}{20} \leq (y^2+5) \times \frac{1}{-(t-10)} \leq 54 \times \frac{1}{9}$ أي : $\frac{21}{20} \leq \frac{-(y^2+5)}{t-10} \leq 6$ بالتالي : $-6 \leq \frac{(y^2+5)}{t-10} \leq -\frac{21}{20}$	لدينا : $\frac{x-t}{y+10z} = (x+(-t)) \times \frac{1}{y+10z}$ لدينا : $-10 \leq t \leq 1$ منه : $-1 \leq -t \leq 10$ ولدينا : $3 \leq x \leq 6$ إذن : $2 \leq x+(-t) \leq 16$ لدينا : $2 \leq z \leq 5$ منه : $20 \leq 10z \leq 50$ ولدينا : $-7 \leq y \leq -4$ إذن : $13 \leq y+10z \leq 46$ إذن : $\frac{1}{46} \leq \frac{1}{y+10z} \leq \frac{1}{13}$ منه : $2 \times \frac{1}{46} \leq (x+(-t)) \times \frac{1}{y+10z} \leq 16 \times \frac{1}{13}$ بالتالي : $\frac{1}{23} \leq \frac{x-t}{y+10z} \leq \frac{16}{13}$
		🔍 ← لاحظ أن التعابير الأخيرة مركبة لذلك فتأطيرها يتطلب كتابتها على شكل جداءات و مجاميع قصد التمكن من تطبيق قواعد الترتيب.

تمرين 3 ← انتبه ← تعليق

<p>لنقارن $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$</p> <p>لدينا : $(\sqrt{5})^2 = 5$</p> <p>و $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$</p> <p>$= 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$</p> <p>بما أن : $5 + 2\sqrt{6} > 5$</p> <p>فإن : $\sqrt{2} + \sqrt{3} > \sqrt{5}$</p>	<p>لنقارن $-2\sqrt{10}$ و $-\sqrt{3}$</p> <p>لدينا : $(\sqrt{3})^2 = 3$</p> <p>و $(2\sqrt{10})^2 = 4 \times 10 = 40$</p> <p>بما أن : $40 > 3$</p> <p>فإن : $2\sqrt{10} > \sqrt{3}$</p> <p>بالتالي : $-2\sqrt{10} < -\sqrt{3}$</p>	<p>لنقارن $3\sqrt{5}$ و $\sqrt{37}$</p> <p>لدينا : $(3\sqrt{5})^2 = 9 \times 5 = 45$ و $(\sqrt{37})^2 = 37$</p> <p>بما أن : $45 > 37$</p> <p>فإن : $3\sqrt{5} > \sqrt{37}$</p>
<p>لنقارن $6 + \sqrt{5}$ و $6 + \sqrt{3}$</p> <p>لدينا $\sqrt{5} > \sqrt{3}$ منه : $6 + \sqrt{5} > 6 + \sqrt{3}$</p>	<p>لنقارن $20\sqrt{2}$ و $-7\sqrt{14}$</p> <p>لدينا : $20\sqrt{2} > 0$ و $-7\sqrt{14} < 0$</p> <p>منه : $20\sqrt{2} > -7\sqrt{14}$</p>	<p>لنقارن $\sqrt{17} - \sqrt{11}$ و $\sqrt{5} - \sqrt{40}$</p> <p>لدينا $\sqrt{5} - \sqrt{40} < 0$ منه $\sqrt{5} - \sqrt{40} < 0$</p> <p>لدينا $\sqrt{17} - \sqrt{11} > 0$ منه $\sqrt{17} - \sqrt{11} > 0$</p> <p>بالتالي : $\sqrt{5} - \sqrt{40} < \sqrt{17} - \sqrt{11}$</p>
<p>لم نقارن المربعين و اكتفينا بمقارنة $\sqrt{5}$ و $\sqrt{3}$ لوجود العدد 6 في كلتا العددين.</p>	<p>لنقارن $3 + \sqrt{3}$ و $\sqrt{27} + 1$</p> <p>لدينا : $(3 + \sqrt{3})^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$</p> <p>$= 9 + 6\sqrt{3} + 3 = 12 + 6\sqrt{3}$</p> <p>و $(\sqrt{27} + 1)^2 = (\sqrt{27})^2 + 2 \times \sqrt{27} \times 1 + 1^2$</p> <p>$= 27 + 2\sqrt{9 \times 3} + 1 = 28 + 6\sqrt{3}$</p> <p>بما أن : $12 + 6\sqrt{3} < 28 + 6\sqrt{3}$</p> <p>فإن : $3 + \sqrt{3} < \sqrt{27} + 1$</p>	<p>لنقارن $20\sqrt{2}$ و $-7\sqrt{14}$</p> <p>لدينا : $20\sqrt{2} > 0$ و $-7\sqrt{14} < 0$</p> <p>منه : $20\sqrt{2} > -7\sqrt{14}$</p>
<p>السالب، لذلك لا نقارن المربعات</p>	<p>بمقارنة $\sqrt{5}$ و $\sqrt{3}$ لوجود العدد 6 في كلتا العددين.</p>	<p>بالتالي : $\sqrt{5} - \sqrt{40} < \sqrt{17} - \sqrt{11}$</p>

تمرين 4 ← انتبه ← تعليق

<p>معطيات : $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ و $2,23 < \sqrt{5} < 2,24$</p>	<p>① لنؤطر $A = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$</p> <p>لدينا : $7,05 < 5\sqrt{2} < 7,1$ منه $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$</p> <p>و لدينا : $4,46 < 2\sqrt{5} < 4,48$ منه $2,23 < \sqrt{5} < 2,24$</p> <p>بالتالي : $11,51 < 5\sqrt{2} + 3\sqrt{5} < 11,58$</p> <p>أي : $11,51 < A < 11,58$</p>
<p>② لنؤطر $B = \frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$</p> <p>لنيسط B أولا:</p> <p>$B = \frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{(5 + \sqrt{5}) \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5} + 5}{5} = \frac{5(\sqrt{5} + 1)}{5} = \sqrt{5} + 1$</p> <p>لدينا : $2,23 < \sqrt{5} < 2,24$ منه : $3,23 < \sqrt{5} + 1 < 3,24$</p> <p>بالتالي : $3,23 < B < 3,24$</p>	<p>بالتالي : $11,51 < 5\sqrt{2} + 3\sqrt{5} < 11,58$</p> <p>أي : $11,51 < A < 11,58$</p>