حــــــــل تماريــــــن الترتيــــــب

حل التمرين الأول:

في العلاقة (1 نضرب طرفا بطرف

$a (1 + k b) < b (1 + k a)$

يعني أن $a + a k b < b + k a b$

إذن $a < b$

نقوم بهذا لنصل إلى شيء في المعطيات $a < b$

ثم نبدأ لدينا $a < b$

إذن <= $k < 0$

نضيف $a k b$ عند طرفين :

$a + a k b < b + a k b$

$a(1 + k b) < b(1 + k a)$

$$\frac{a(1 + k b)}{b} < 1 + k a$$

$$\boxed{\frac{a}{b} < \frac{1 + k a}{1 + k b}}$$

حل التمرين الثاني :

لدينا $-1 < a < 1$ إذا أردنا أن نقوم بتأطير ab وجب معرفة إشارة a

إذا كان $-1 < a < 0$ فإن : $\begin{cases} 0 < -a < 1 \\ 0 < b < 3 \end{cases}$ إذن $0 < -a b < 3$

إذن $(1)\quad -3 < a b < 0$

$0 < a < 1$

$0 < b < 3$

إذن $(2)\quad 0 < a b < 3$

حسب (1) و (2) لدينا

$-3 < 0 < a b < 3 < 0 < 3$

$$\boxed{-3 < a b < 3}$$

حل التمرين الثالث:

ليكن $-1 < a < 2$

احذر لا يمكنك تأطير عدد مربع a^2 دون معرفة إشارته

لذلك نتبع التأطير حسب الحالات:

- إذا $-1 < a < 0$ فإن $0 < -a < 1$

ثم كان $0 < -a < 1$

بضرب أطراف العلاقتين $0 < -a \times -a < 1$

يعني $0 < a^2 < 1$

ثم $-1 < a^2 + a < 1$ (1)

- إذا كان $0 < a < 2$ فإن $0 < a^2 < 4$

$0 < a^2 + 2 < 6$ (2)

(1) و (2) نستنتج أن:

حسب العلاقتين

$-1 < 0 < a^2 + a < 1 < 6$

إذن $\boxed{-1 < a^2 + a < 6}$

حل التمرين الرابع:

1- لدينا : $b = -3 - a$

لدينا $-2 < a < 1$

إذن $-1 < -a < 2$

$-4 < -3 - a < -1$

يعني $-4 < b < -1$

2- تأطير a^2

$-2 < a < 0 \Rightarrow 0 < -a < 2$

إذن $0 < -a \times a < 4$

$\boxed{0 < a^2 < 4}$ (1)

- إذا كان $0 < a < 1$ فإن: $\boxed{0 < a^2 < 1}$ (2)

و بالتالي حسب (1) و (2) لدينا :

$0 < a^2 < 1 < 4$

إذن : $\boxed{0 < a^2 < 4}$

- تأطير $\frac{a+3}{5-b}$

لدينا $1 < a + 3 <$

و $1 < -b < 4$

$6 < 5 - b < 9$

$\frac{1}{9} < \frac{1}{5-b} < \frac{1}{6}$

$\frac{1}{9} < \frac{a+3}{5-b} < \frac{4}{6}$

$$\boxed{\frac{1}{9} < \frac{a+3}{5-b} < \frac{2}{3}}$$

- تأطير $\frac{1}{a-2}$

احذر لا يمكن تأطير $\frac{1}{a-2}$ دون معرفة إشارة $a-2$

لدينا $-2 < a < 1$

إذن $-4 < a-2 < -1$

احذر لا يمكن قلب عدد داخل التأطير إلا إذا كان موجب

لذلك $1 < -(a-2) < 4$

إذن $\frac{1}{4} < \frac{+1}{-(a-2)} < 1$

إذن $\frac{1}{4} < \frac{-1}{a-2} < 1$

$$\boxed{-1 < \frac{1}{a-2} < \frac{-1}{4}}$$

حل التمرين الخامس:

1- لدينا $A = \frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \times \frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$

$$= \frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{6-2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-3}{9-3}$$

$$= \frac{3+\sqrt{3}}{6}$$

-2 $B-A = \frac{6+\sqrt{3}}{11} - \frac{3+\sqrt{3}}{6}$

$$= \frac{36+6\sqrt{3}-33-11\sqrt{3}}{66}$$

$$= \frac{3-5\sqrt{3}}{66}$$

3- لدينا $B-A = \frac{3-5\sqrt{3}}{66}$

من أجل أن نبين أن $B < A$ يكفي أن يكون $B-A < 0$

يعني $\frac{3-5\sqrt{3}}{66} < 0$

أو $3-5\sqrt{3} < 0$

أو $3 < 5\sqrt{3}$

إذن يكفي أن نبين أن $3 < 5\sqrt{3}$

نرفع إلى المربع : $3^2 < (5\sqrt{3})^2$

وهذا في الهامش

يعني $9 < 25 \times 3$

$9 < 75$

لدينا: $9 < 75$

يعني $3^2 < 5^2 \times 3$

إذن $\sqrt{3^2} < \sqrt{5^2 \times 3}$

يعني $3 < 5\sqrt{3}$

إذن $3 - 5\sqrt{3} < 0$

و بالتالي $B - A < 0$ إذن $B < A$

حل التمرين السادس:

1- لدينا $2 - \frac{1}{x+3} = \frac{2(x+3)-1}{x+3}$

$$= \frac{2x+6-1}{x+3}$$

$$= \frac{2x+5}{x+3}$$

$$= a$$

$$2 - \frac{1}{x+2} = \frac{2(x+3)-1}{x+2}$$

$$= \frac{2x+3}{x+2}$$

$$= b$$

2- لدينا $a - b = 2 - \frac{1}{x+3} - 2 + \frac{1}{x+2}$

$$= \frac{-x-2+x+3}{(x+3)(x+2)}$$

$$= \frac{1}{(x+3)(x+2)}$$

لدينا $x + 2 > 0 \Leftarrow x \geq 0$

و $x + 3 > 0$

إذن: $a - b > 0$

$a > b$

و منه فإن: $b < a$

حل التمرين السابع :

1- من أجل البرهنة أن $b < a$ يكفي أن نبين أن $\frac{b}{a} < 1$

و بالتالي يجب تأطير العدد $\frac{b}{a}$

لدينا $1 + \sqrt{3} < a < 2\sqrt{2}$

إذن $\frac{1}{2\sqrt{2}} < \frac{1}{a} < \frac{1}{1+\sqrt{3}}$

إذن $\frac{1}{2\sqrt{2}} < \frac{b}{a} < \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

من جهة أخرى لدينا $\sqrt{3} < 1+\sqrt{3}$

إذن $\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} < 1$

إذن: $\frac{b}{a} < \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ و بالتالي $b < a$

2- تأطير للعددين $\frac{c}{a}$ و $\frac{a}{c}$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} < \frac{1}{a} < \frac{1}{1+\sqrt{3}}$$

لدينا c عدد سالب: $1-\sqrt{3} < c < \frac{-\sqrt{2}}{4}$

حذار من تأطير جداء عدد سالب × عدد موجب

$$\frac{\sqrt{2}}{4} < -c < \sqrt{3}-1$$

إذن $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) < -c \times \frac{1}{a} < \sqrt{3}-1 \times \frac{1}{1+\sqrt{3}}$

$$\frac{1}{8} < \frac{-c}{a} < \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

إذن: $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} < \frac{c}{a} < \frac{-1}{8}$ (2)

تأطير $\frac{a}{c}$ من خلال التأطير (2)

لدينا $\frac{1}{\frac{-1}{8}} < \frac{1}{\frac{c}{a}} < \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$

$$-8 < \frac{a}{c} < \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

تاطير $a \times b$

لدينا $-2 < b < -1$

$1 < -b < 2$

إذن:

$1+\sqrt{3} < a < 2\sqrt{2}$

و

إذن : $1+\sqrt{3} < -a\,b < 4$

و بالتالي $-4 < a\,b < -1-\sqrt{3}$

حل التمرين الثامن :

$-6 \le x \le -2$ و $-4 \le y \le 3$

$-10 \le x + y \le 1$

احذر أن تأطر عددا مربعا دون أن يكون موجبا

– إذا كان $-4 \le y \le 0$ فإن $0 \le -y \le 4$

إذن $0 \le -yx - y \le 16$

$0 \le y^2 \le 16$

(1) $-1 \le y^2 - 1 \le 15$

- إذا كان $0 \le y \le 3$

(2) $0 \le y^2 \le 9$

$-1 \le y^2 - 1 \le 8$

حسب (1) و (2) فإن

$-1 \le y^2 - 1 \le 8 \le 15$

و بالتالي $-1 \le y^2 - 1 \le 15$

حل التمرين التاسع :

1- بين أن $\sqrt{a+1} - \sqrt{a} < \frac{1}{2\sqrt{a}}$

من أجل ذلك نبين أن :

$$\sqrt{a+1} - \sqrt{a} = \sqrt{a+1} - \sqrt{a} \times \frac{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}}$$

$$= \frac{(\sqrt{a+1})^2 - (\sqrt{a})^2}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}}$$

$$= \frac{a+1-a}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}}$$

إذن يكفي أن نبين أن $\frac{1}{2\sqrt{a+1}} < \frac{1}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}} < \frac{1}{2\sqrt{a}}$

يكافئ (1) $2\sqrt{a} < \sqrt{a+1} + \sqrt{a} < 2\sqrt{a+1}$

لدينا $a < a + 1$

إذن $\sqrt{a} < \sqrt{a+1}$

$$\sqrt{a+1} + \sqrt{a} < \sqrt{a+1} + \sqrt{a+1}$$

$$\sqrt{a+1} + \sqrt{a} < 2\sqrt{a+1}$$

من جهة أخرى لدينا $a < a + 1$

إذن $\sqrt{a} < \sqrt{a+1}$

إذن $\sqrt{a} - \sqrt{a} < \sqrt{a+1} + \sqrt{a}$

يعني $2\sqrt{a} < \sqrt{a+1} + \sqrt{a}$

و بالتالي $2\sqrt{a} < \sqrt{a+1} + \sqrt{a} < 2\sqrt{a+1}$

$$\frac{1}{2\sqrt{a+1}} < \frac{1}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}} < \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

2- إذا عوضنا $a = 1$ في التأطيرالأول :

نرفع التأطير $\frac{1}{2\sqrt{a+1}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a} < \frac{1}{2\sqrt{a}}$

إلى المربع $\left(\frac{1}{2\sqrt{a+1}}\right)^2 < (\sqrt{a+1} - \sqrt{a})^2 < \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2$

$$\frac{1}{4\,(a+1)} < a + 1 - 2\sqrt{a(a+1)} + a < \frac{1}{4\,a}$$

$$\frac{1}{4\,(a+1)} < 2a + 1 - 2\sqrt{a(a+1)} < \frac{1}{4\,a}$$

نعوض $\frac{1}{8} < 3 - 2\sqrt{2} < \frac{1}{4} \quad \Leftarrow \quad a = 1$

$$-\frac{23}{8} < -2\sqrt{2} < -\frac{11}{4}$$

$$-\frac{23}{16} < 2\sqrt{2} < -\frac{11}{8}$$

$$\frac{11}{8} < \sqrt{2} < \frac{23}{16}$$

حل التمرين العاشر :

لدينا $a = x + \frac{1}{x}$

$$a^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x \times \frac{1}{x}$$

$$= x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

لدينا $\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{9} \le x^2 \le \frac{1}{4}$$

و $4 \le \frac{1}{x^2} \le 9$

إذن $\frac{1}{9} + 4 + 2 \le x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \le \frac{1}{4} + 9 + 2$

$$\boxed{\frac{55}{9} \le a^2 \le \frac{45}{4}}$$

2- لدينا $\sqrt{\frac{55}{9}} \le \sqrt{a^2} \le \sqrt{\frac{45}{4}}$

$\frac{\sqrt{55}}{3} \le a \le \frac{3\sqrt{5}}{2}$ $[45 = 5\times 3^2 ; \sqrt{45} = \sqrt{5} \times 3]$

3- لدينا $-2 \le y \le -1$ إذن $-1 \le \frac{1}{y} \le \frac{-1}{2}$

يعني $\frac{1}{3} \times -1 \le x \times \frac{1}{y} \le \frac{1}{2} \times \frac{-1}{2}$

$$\boxed{-\frac{1}{3} \le \frac{x}{y} \le -\frac{1}{4}} \quad (1)$$

$2 \le \frac{1}{x} \le 3$

$-2 \le y \le -1$

إذن $$\boxed{-4 \le \frac{x}{y} \le -3} \quad (2)$$

من (1) و (2) $$\boxed{-\frac{13}{3} \le \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \le -\frac{13}{4}}$$