



حلّول التمرّين

الترتيب و العماليات

المستوى : الثالثة ثانوي إعدادي

من إعداد الأستاذ : المهدي عنيّس

وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي
وتكوين الأطر والبحث العلمي

تمرّين ①

(1) - لنقارن ما يلي :

$$\frac{-5}{9} \text{ و } \frac{-7}{18} \quad \times$$

$$\frac{-7}{18} - \frac{-5}{9} = \frac{-7}{18} - \frac{-10}{18} = \frac{-7+10}{18} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6} \quad \text{لدينا :}$$

$$\frac{-7}{18} \geq \frac{-5}{9} \quad \text{إذن : بما أن } \frac{1}{6} \geq 0 \quad \text{فإن : } \frac{-7}{18} - \frac{-5}{9} \geq 0 \quad \text{و منه فإن}$$

$$-\sqrt{2} \text{ و } -\sqrt{2} + \frac{1}{2} \quad \times$$

$$\frac{-\sqrt{2} + \frac{1}{2} \geq -\sqrt{2}}{\text{لدينا :}} \quad \frac{1}{2} \geq 0 \quad \text{يعني أن : } -\sqrt{2} + \frac{1}{2} \geq 0 + (-\sqrt{2}) \quad \text{و منه فإن}$$

$$\frac{3}{7} + 3^{2012} \text{ و } \frac{12}{5} + 3^{2012} \quad \times$$

$$\frac{12}{5} - \frac{3}{7} = \frac{84}{35} - \frac{15}{35} = \frac{69}{35} \quad \text{لدينا :}$$

$$\frac{12}{5} + 3^{2012} \geq \frac{3}{7} + 3^{2012} \quad \text{إذن : بما أن } \frac{69}{35} \geq 0 \quad \text{فإن : } \frac{12}{5} - \frac{3}{7} \geq 0 \quad \text{و منه فإن } \frac{12}{5} \geq \frac{3}{7} \quad \text{و بالتالي فإن}$$

$$2\sqrt{7} \times \frac{18}{5} \text{ و } 2\sqrt{7} \times \frac{11}{25} \quad \times$$

$$\frac{11}{25} - \frac{18}{5} = \frac{11}{25} - \frac{90}{25} = \frac{-79}{25} \quad \text{لدينا :}$$

$$\frac{11}{25} \leq \frac{18}{5} \quad \text{إذن : بما أن } \frac{-79}{25} \leq 0 \quad \text{فإن : } \frac{11}{25} - \frac{18}{5} \leq 0 \quad \text{و منه فإن}$$

$$\frac{11}{25} \times 2\sqrt{7} \leq \frac{18}{5} \times 2\sqrt{7} \quad \text{و بما أن } 2\sqrt{7} > 0 \quad \text{فإن}$$

$$-\sqrt{3} \times \frac{11}{2} \text{ و } -\sqrt{3} \times \frac{13}{7} \quad \times$$

$$\frac{13}{7} - \frac{11}{2} = \frac{26}{14} - \frac{77}{14} = \frac{-51}{14} \quad \text{لدينا :}$$

$$\frac{13}{7} \leq \frac{11}{2} \quad \text{إذن : بما أن } \frac{-51}{14} \leq 0 \quad \text{فإن } \frac{13}{7} - \frac{11}{2} \leq 0 \quad \text{و منه فإن}$$

$$-\sqrt{3} \times \frac{13}{7} \geq -\sqrt{3} \times \frac{11}{2} \quad \text{و بما أن } -\sqrt{3} < 0 \quad \text{فإن}$$

(2) - x و y عددان حقيقيان بحيث : $x > 0$ و $y < 0$.

✖ لنقارن : $x+y$ و $y-x$:

لدينا : $(x+y)-(y-x)=x+y-y+x=2x$.

و بما أن : $x > 0$ فإن $2x > 0$ و منه فإن : $(x+y)-(y-x) > 0$ و بالتالي فإن : $x+y > y-x$.

✖ لنقارن : $3y+x$ و $4y+x$:

لدينا : $(3y+x)-(4y+x)=3y+x-4y-x=-y$.

و بما أن : $y < 0$ فإن $-y > 0$ و منه فإن : $(3y+x)-(4y+x) > 0$ و بالتالي فإن : $3y+x > 4y+x$.

(3) - قارن العدديين الحقيقيين a و b بحيث : $a = \sqrt{12} + \sqrt{27}$ و $b = \sqrt{48}$:

لدينا : $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ و $\sqrt{12} + \sqrt{27} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.

و بما أن : $5\sqrt{3} \geq 4\sqrt{3}$ فإن : $\sqrt{12} + \sqrt{27} \geq \sqrt{48}$ و بالتالي فإن : $a \geq b$.

تمرين ② :

(1) - لنقارن بين ما يلي :

✖ $3\sqrt{7}$ و $2\sqrt{17}$:

لدينا : $(3\sqrt{7})^2 = 63$ و $(2\sqrt{17})^2 = 68$.

إذن : $(3\sqrt{7})^2 \leq (2\sqrt{17})^2$ و بما أن : $\left. \begin{array}{l} 3\sqrt{7} > 0 \\ 2\sqrt{17} > 0 \end{array} \right\}$ فإن : $3\sqrt{7} \leq 2\sqrt{17}$.

✖ $-3\sqrt{11}$ و $-5\sqrt{5}$:

لدينا : $(-3\sqrt{11})^2 = 99$ و $(-5\sqrt{5})^2 = 125$.

إذن : $(-5\sqrt{5})^2 \geq (-3\sqrt{11})^2$ و بما أن : $\left. \begin{array}{l} -5\sqrt{5} < 0 \\ -3\sqrt{11} < 0 \end{array} \right\}$ فإن : $-5\sqrt{5} \leq -3\sqrt{11}$.

✖ $\sqrt{3}-\sqrt{17}$ و $3\sqrt{5}$:

لدينا : $3\sqrt{5} > 0$.

* / لنحدد إشارة $\sqrt{3}-\sqrt{17}$.

لدينا : $\left. \begin{array}{l} \sqrt{3}^2 = 3 \\ \sqrt{17}^2 = 17 \end{array} \right\}$ إذن : $\sqrt{3}^2 < \sqrt{17}^2$ و بما أن : $\left. \begin{array}{l} \sqrt{3} > 0 \\ \sqrt{17} > 0 \end{array} \right\}$ فإن : $\sqrt{3} \leq \sqrt{17}$ و منه فإن : $\sqrt{3}-\sqrt{17} < 0$.

بما أن : $\left. \begin{array}{l} \sqrt{3}-\sqrt{17} < 0 \\ 3\sqrt{5} > 0 \end{array} \right\}$ فإن : $\sqrt{3}-\sqrt{17} < 3\sqrt{5}$.

✖ $\sqrt{3}+2$ و $\sqrt{7+2\sqrt{11}}$:

لدينا : $(\sqrt{3}+2)^2 = \sqrt{3}^2 + 2 \times \sqrt{3} \times 2 + 2^2 = 3 + 4\sqrt{3} + 4 = 7 + 4\sqrt{3}$ و $(\sqrt{7+2\sqrt{11}})^2 = 7 + 2\sqrt{11}$.

* / لنفان : $2\sqrt{11}$ و $4\sqrt{3}$

$$\left. \begin{array}{l} 4\sqrt{3} > 0 \\ 2\sqrt{11} > 0 \end{array} \right\} \text{فان} : 4\sqrt{3} \geq 2\sqrt{11} \quad \left. \begin{array}{l} \text{إذن} : (4\sqrt{3})^2 \geq (2\sqrt{11})^2 \\ \text{لدينا} : \end{array} \right\} \text{و} : \begin{array}{l} (4\sqrt{3})^2 = 48 \\ (2\sqrt{11})^2 = 44 \end{array}$$

$$\text{و منه فان} : 7 + 4\sqrt{3} \geq 7 + 2\sqrt{11} \quad \text{أي} \quad (\sqrt{3} + 2)^2 \geq (\sqrt{7 + \sqrt{11}})^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{3} + 2 > 0 \\ \sqrt{7 + \sqrt{11}} > 0 \end{array} \right\} \text{فان} : \boxed{\sqrt{3} + 2 \geq \sqrt{7 + \sqrt{11}}} \quad \text{و بما أن} :$$

(2) - a و b عددان حقيقيان موجبان بحيث : $a \leq b$

$$\text{إ} \quad \text{--} \quad \text{لثبت أن} : a + 1 \leq b + \frac{5}{4}$$

$$\text{لدينا} : 5 > 4 , \text{ إذن} : 1 \leq \frac{5}{4} \text{ و بما أن} : a \leq b \text{ فان} : \boxed{a + 1 \leq b + \frac{5}{4}}$$

$$\text{لثبت أن} : b + \sqrt{7} \geq a - 3\sqrt{7}$$

$$\text{لدينا} : \sqrt{7} \geq -3\sqrt{7} \text{ و بما أن} : b \geq a \text{ فان} : b + \sqrt{7} \geq a + (-3\sqrt{7}) \quad \text{أي} : \boxed{b + \sqrt{7} \geq a - 3\sqrt{7}}$$

$$\text{(ب) -- لنفان العددين} : \frac{a^2 + 3b^2}{4} \text{ و } b^2$$

$$\text{لدينا} : \frac{a^2 + 3b^2}{4} - b^2 = \frac{a^2 + 3b^2}{4} - \frac{4b^2}{4} = \frac{a^2 + 3b^2 - 4b^2}{4} = \frac{a^2 - b^2}{4}$$

$$\text{و بما أن} : a \leq b \text{ فان} : a^2 \leq b^2 \text{ و منه فان} : a^2 - b^2 \leq 0 \text{ , و بما أن} 4 \geq 0 \text{ فان} : \frac{a^2 - b^2}{4} \leq 0$$

$$\text{و منه فان} : \frac{a^2 + 3b^2}{4} - b^2 \leq 0 \text{ و بالتالي فان} : \boxed{\frac{a^2 + 3b^2}{4} \leq b^2}$$

(3) - a و b و c أعداد حقيقية موجبة .

$$\text{إ} \quad \text{--} \quad \text{لثبت أن} : a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$\text{لدينا} : (a^2 + b^2) - 2ab = a^2 + b^2 - 2ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$\text{و بما أن} : (a - b)^2 \geq 0 \text{ فان} : (a^2 + b^2) - 2ab \geq 0 \text{ و بالتالي فان} : a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$\text{(ب) -- لنستنج أن} : a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$$

$$\left. \begin{array}{l} a^2 + b^2 \geq 2ab \\ b^2 + c^2 \geq 2bc \\ a^2 + c^2 \geq 2ac \end{array} \right\} \text{لدين من خلال ما سبق أن} : (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (a^2 + c^2) \geq 2ab + 2bc + 2ac$$

$$\text{أي} : a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + a^2 + c^2 \geq 2(ab + bc + ac) \text{ و منه فان} : 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2(ab + bc + ac)$$

$$\text{إذن} : 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ac) \text{ و منه فان} : a^2 + b^2 + c^2 = \frac{2(ab + bc + ac)}{2}$$

$$\text{و بالتالي فان} : a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$$

ج) -- علما أن $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ لنبين أن $(a+b+c)^2 = 1 + 2(ab+bc+ac)$:
لدينا :

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2 \times (a+b) \times c + c^2 \\ &= (a+b)^2 + 2c(a+b) + c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \\ &= (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab+bc+ac) \\ &= 1 + 2(ab+bc+ac)\end{aligned}$$

$$\boxed{(a+b+c)^2 = 1 + 2(ab+bc+ac)} \quad \text{إذن :}$$

د) -- لنستنتج من ما سبق أن $a+b+c \leq \sqrt{3}$:

نعلم أن : و $\left. \begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 \geq ab+bc+ac \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{array} \right\}$ إذن : (1) $1 \geq ab+bc+ac$:

و بما أن $(a+b+c)^2 = 1 + 2(ab+bc+ac)$: فإن $ab+bc+ac = \frac{(a+b+c)^2 - 1}{2}$ (2) :

و من (1) و (2) نستنتج أن : $1 \geq \frac{(a+b+c)^2 - 1}{2}$ أي $\frac{(a+b+c)^2 - 1}{2} \leq 1$:

و منه فإن : $(a+b+c)^2 - 1 \leq 2$ يعني أن $(a+b+c)^2 \leq 2+1$ أي $(a+b+c)^2 \leq 3$:

و بالتالي فإن : $\sqrt{(a+b+c)^2} \leq \sqrt{3}$ أي $\boxed{a+b+c \leq \sqrt{3}}$:

تدريب ③ :

(1) - لنبين أن $x-y = \frac{\sqrt{3}-7}{2}$:

لدينا :

$$\begin{aligned}x-y &= \frac{2}{\sqrt{3}+1} - \frac{5+\sqrt{3}}{2} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} - \frac{5+\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}^2-1^2} - \frac{5+\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}-2}{3-1} - \frac{5+\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{3}-2}{2} - \frac{5+\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{3}-2-5-\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}-7}{2}\end{aligned}$$

(2) -- لنقارن العددين : $\sqrt{3}$ و 7 .

لدينا : $\left. \begin{array}{l} \sqrt{3}^2 = 3 \\ 7^2 = 49 \end{array} \right\}$ و ، إذن : $\sqrt{3}^2 \leq 7^2$ و بما أن : $\left. \begin{array}{l} \sqrt{3} > 0 \\ 7 > 0 \end{array} \right\}$ فإن : $\boxed{\sqrt{3} \leq 7}$.

(ب) -- لنستنتج مقارنة x و y :

لدينا : $\sqrt{3} \leq 7$ يعني أن : $\sqrt{3} - 7 \leq 0$ و منه فإن : $\frac{\sqrt{3} - 7}{2} \leq 0$ أي : $x - y \leq 0$ و بالتالي فإن : $\boxed{x \leq y}$.

تصليح ④ :

(1) -- لنقارن العددين : $\sqrt{7}$ و 2 .

لدينا : $\left. \begin{array}{l} \sqrt{7}^2 = 7 \\ 2^2 = 4 \end{array} \right\}$ و ، إذن : $\sqrt{7}^2 \geq 2^2$ ، و بما أن : $\left. \begin{array}{l} \sqrt{7} > 0 \\ 2 > 0 \end{array} \right\}$ فإن : $\boxed{\sqrt{7} \geq 2}$.

✖ لنقارن العددين : $\sqrt{3}$ و 5 .

لدينا : $\left. \begin{array}{l} \sqrt{3}^2 = 3 \\ 5^2 = 25 \end{array} \right\}$ و ، إذن : $\sqrt{3}^2 \leq 5^2$ ، و بما أن : $\left. \begin{array}{l} \sqrt{3} > 0 \\ 5 > 0 \end{array} \right\}$ فإن : $\boxed{\sqrt{3} \leq 5}$.

(ب) -- لنستنتج تبسيط العددين : $m = \sqrt{(\sqrt{7} - 2)^2}$ و $n = \sqrt{(\sqrt{3} - 5)^2}$.

نعلم أن : $\sqrt{7} \geq 2$ يعني : $\sqrt{7} - 2 \geq 0$ و منه فإن : $\boxed{m = \sqrt{(\sqrt{7} - 2)^2} = \sqrt{7} - 2}$.

و نعلم أن : $\sqrt{3} \leq 5$ يعني أن : $\sqrt{3} - 5 \leq 0$ و منه فإن : $\boxed{n = \sqrt{(\sqrt{3} - 5)^2} = 5 - \sqrt{3}}$.

(2) -- أنشر و بسط العددين : $(\sqrt{5} - 4)^2$ و $(6 - \sqrt{2})^2$.

لدينا : $\left. \begin{array}{l} (\sqrt{5} - 4)^2 = \sqrt{5}^2 - 2 \times 4 \times \sqrt{5} + 4^2 = 5 - 8\sqrt{5} + 16 = 21 - 8\sqrt{5} \\ (6 - \sqrt{2})^2 = 6^2 - 2 \times 6 \times \sqrt{2} + \sqrt{2}^2 = 36 - 12\sqrt{2} + 2 = 38 - 12\sqrt{2} \end{array} \right\}$ و

(ب) -- لنستنتج تبسيط العدد : $v = \sqrt{21 - 8\sqrt{5}}$.

لدينا : $(\sqrt{5} - 4)^2 = 21 - 8\sqrt{5}$ يعني أن : $v = \sqrt{21 - 8\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} - 4)^2}$.

* / لنحدد إشارة : $\sqrt{5} - 4$.

لدينا : $\left. \begin{array}{l} \sqrt{5}^2 = 5 \\ 4^2 = 16 \end{array} \right\}$ ، إذن : $\sqrt{5}^2 \leq 4^2$ و بما أن : $\left. \begin{array}{l} \sqrt{5} > 0 \\ 4 > 0 \end{array} \right\}$ فإن : $\sqrt{5} \leq 4$ و منه : $\boxed{\sqrt{5} - 4 \leq 0}$.

و بالتالي فإن : $\boxed{v = \sqrt{21 - 8\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} - 4)^2} = 4 - \sqrt{5}}$.

✳ لنستنتج تبسيطا للعدد : $w = \sqrt{38-12\sqrt{2}}$

لدينا : $(6-\sqrt{2})^2 = 38-12\sqrt{2}$ يعني أن $w = \sqrt{38-12\sqrt{2}} = \sqrt{(6-\sqrt{2})^2}$

* / لنحدد إشارة : $6-\sqrt{2}$

لدينا : $\left. \begin{array}{l} 6^2 = 36 \\ \sqrt{2}^2 = 2 \end{array} \right\}$ إذن ، $6^2 \geq \sqrt{2}^2$ و بما أن $6 > 0$ و $\sqrt{2} > 0$ فإن $6 \geq \sqrt{2}$ و منه فإن $6 - \sqrt{2} \geq 0$

و بالتالي فإن $w = \sqrt{38-12\sqrt{2}} = \sqrt{(6-\sqrt{2})^2} = 6 - \sqrt{2}$

🌸 تمرين ⑤ :

(1) - ✳ لنثبت أن $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$

لدينا : $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{1(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$

✳ لنثبت أن $\frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

لدينا : $\frac{1}{\sqrt{3}+1} = \frac{1(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}^2-1^2} = \frac{\sqrt{3}-1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

(2) - (أ) -- لنقارن العددين : $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ و $\sqrt{3}+1$

لدينا : $\left. \begin{array}{l} \sqrt{5}^2 = 5 \\ 1^2 = 1 \end{array} \right\}$ إذن ، $\sqrt{5}^2 \geq 1^2$ و بما أن $\sqrt{5} > 0$ و $1 > 0$ فإن $\sqrt{5} \geq 1$ و منه فإن $\sqrt{5} + \sqrt{3} \geq \sqrt{3} + 1$

(ب) -- لنستنتج مقارنة العددين : $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ و $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$

نعلم أن : $\sqrt{5} + \sqrt{3} \geq \sqrt{3} + 1$ يعني أن $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \leq \frac{1}{\sqrt{3} + 1}$ و بما أن $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$ و $\frac{1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ فإن

$$\boxed{\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} \leq \frac{\sqrt{3} - 1}{2}}$$

🌸 تمرين ⑥ :

(1) - لنبين أن : $\frac{2}{3} \leq c \leq 1$

لدينا : $\frac{1}{2} \leq \frac{3c-1}{2} \leq 1$ يعني أن $\frac{1}{2} \times 2 \leq \frac{3c-1}{2} \times 2 \leq 1 \times 2$ و منه فإن $1 \leq 3c-1 \leq 2$

إذن : $1+1 \leq 3c-1+1 \leq 2+1$ أي : $2 \leq 3c \leq 3$ و منه فإن $2 \times \frac{1}{3} \leq 3c \times \frac{1}{3} \leq 3 \times \frac{1}{3}$ و بالتالي فإن $\frac{2}{3} \leq c \leq 1$

(2) - لنؤطر $a + b$:

لدينا : $9 \leq a \leq 16$ ، $-7 \leq b \leq -6$ ، إذن ، $9-7 \leq a+b \leq 16-6$: و منه فإن $2 \leq a+b \leq 10$.

لنؤطر ab :

لدينا : $9 \leq a \leq 16$ ، $6 \leq -b \leq 7$ ، إذن ، $9 \times 6 \leq a \times (-b) \leq 16 \times 7$: أي $54 \leq -ab \leq 112$: و منه فإن $-112 \leq ab \leq -54$.

لنؤطر $\frac{a}{b}$:

لدينا : $9 \leq a \leq 16$ ، $\frac{1}{7} \leq \frac{1}{-b} \leq \frac{1}{6}$ ، إذن ، $9 \times \frac{1}{7} \leq a \times \frac{1}{-b} \leq 16 \times \frac{1}{6}$: أي $\frac{9}{7} \leq \frac{a}{-b} \leq \frac{16}{6}$:

و منه فإن $\frac{9}{7} \leq \frac{a}{-b} \leq \frac{8}{3}$: و بالتالي فإن $-\frac{8}{3} \leq \frac{a}{b} \leq -\frac{9}{7}$.

لنؤطر $-3a + 2b - 15$:

لدينا : $9 \leq a \leq 16$ ، $-7 \leq b \leq -6$ ، إذن ، $-3 \times 16 \leq -3a \leq -3 \times 9$: أي $-48 \leq -3a \leq -27$ ، $2 \times (-7) \leq 2b \leq 2 \times (-6)$: أي $-14 \leq 2b \leq -12$:

و منه فإن $-48 - 14 - 15 \leq -3a + 2b - 15 \leq -27 - 12 - 15$: و بالتالي فإن $-77 \leq -3a + 2b - 15 \leq -54$.

لنؤطر $2\sqrt{a} + d$:

لدينا : $9 \leq a \leq 16$ ، $-2 \leq d \leq -1$ ، إذن ، $\sqrt{9} \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{16}$: أي $3 \leq \sqrt{a} \leq 4$ ، $-2 \leq d \leq -1$: و منه فإن $3-2 \leq \sqrt{a} + d \leq 4-1$: و بالتالي فإن $1 \leq \sqrt{a} + d \leq 3$.

لنؤطر $a^2 + bd - b^2$:

لدينا : $9 \leq a \leq 16$ ، $6 \leq -b \leq 7$ ، $1 \leq -d \leq 2$ ، إذن ، $81 \leq a^2 \leq 256$ ، $-49 \leq -b^2 \leq -36$ ، $6 \leq bd \leq 14$: و منه فإن $81 + 6 - 49 \leq a^2 + bd - b^2 \leq 256 + 14 - 36$:

و بالتالي فإن $38 \leq a^2 + bd - b^2 \leq 234$.

لنؤطر $\frac{2b-d}{a+b}$: نضع $\frac{2b-d}{a+b} = (2b-d) \times \frac{1}{a+b}$.

لدينا : $-7 \leq b \leq -6$ ، $-2 \leq d \leq -1$ ، إذن ، $-14 \leq 2b \leq -12$ ، $1 \leq -d \leq 2$: و منه فإن $-14 + 1 \leq 2b - d \leq -12 + 2$: أي $-13 \leq 2b - d \leq -10$.

$$\boxed{\frac{1}{10} \leq \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{2}} : \text{إذن ، } 2 \leq a+b \leq 10 : \text{نعلم أن}$$

$$10 \times \frac{1}{10} \leq -(2b-d) \times \frac{1}{a+b} \leq 13 \times \frac{1}{2} : \text{ومنه فإن } \left. \begin{array}{l} 10 \leq -(2b-d) \leq 13 \\ \frac{1}{10} \leq \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{2} \end{array} \right\} : \text{إذن ، } \left. \begin{array}{l} -13 \leq 2b-d \leq -10 \\ \frac{1}{10} \leq \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{2} \end{array} \right\} \text{ لدينا و}$$

$$\boxed{-\frac{13}{2} \leq \frac{2b-d}{a+b} \leq -1} : \text{و بالتالي فإن } 1 \leq -\frac{2b-d}{a+b} \leq \frac{13}{2} : \text{أي}$$

$$: \sqrt{a^2 - ab + b^2} \text{ لنؤطر ✖}$$

$$\left. \begin{array}{l} 81 \leq a^2 \leq 256 \\ 54 \leq -ab \leq 112 \\ 36 \leq b^2 \leq 49 \end{array} \right\} : \text{و منه فإن } \left. \begin{array}{l} 81 \leq a^2 \leq 256 \\ -112 \leq ab \leq -54 \\ (-6)^2 \leq b^2 \leq (-7)^2 \end{array} \right\} \text{ و : إذن ، } \left. \begin{array}{l} 9 \leq a \leq 16 \\ -7 \leq b \leq -6 \end{array} \right\} \text{ لدينا و}$$

$$.171 \leq a^2 - ab + b^2 \leq 417 : \text{إذن } 81+54+36 \leq a^2 - ab + b^2 \leq 256+112+49 : \text{ومنه فإن}$$

$$\boxed{3\sqrt{19} \leq \sqrt{a^2 - ab + b^2} \leq \sqrt{417}} : \text{أي } \sqrt{171} \leq \sqrt{a^2 - ab + b^2} \leq \sqrt{417} : \text{و بالتالي فإن}$$